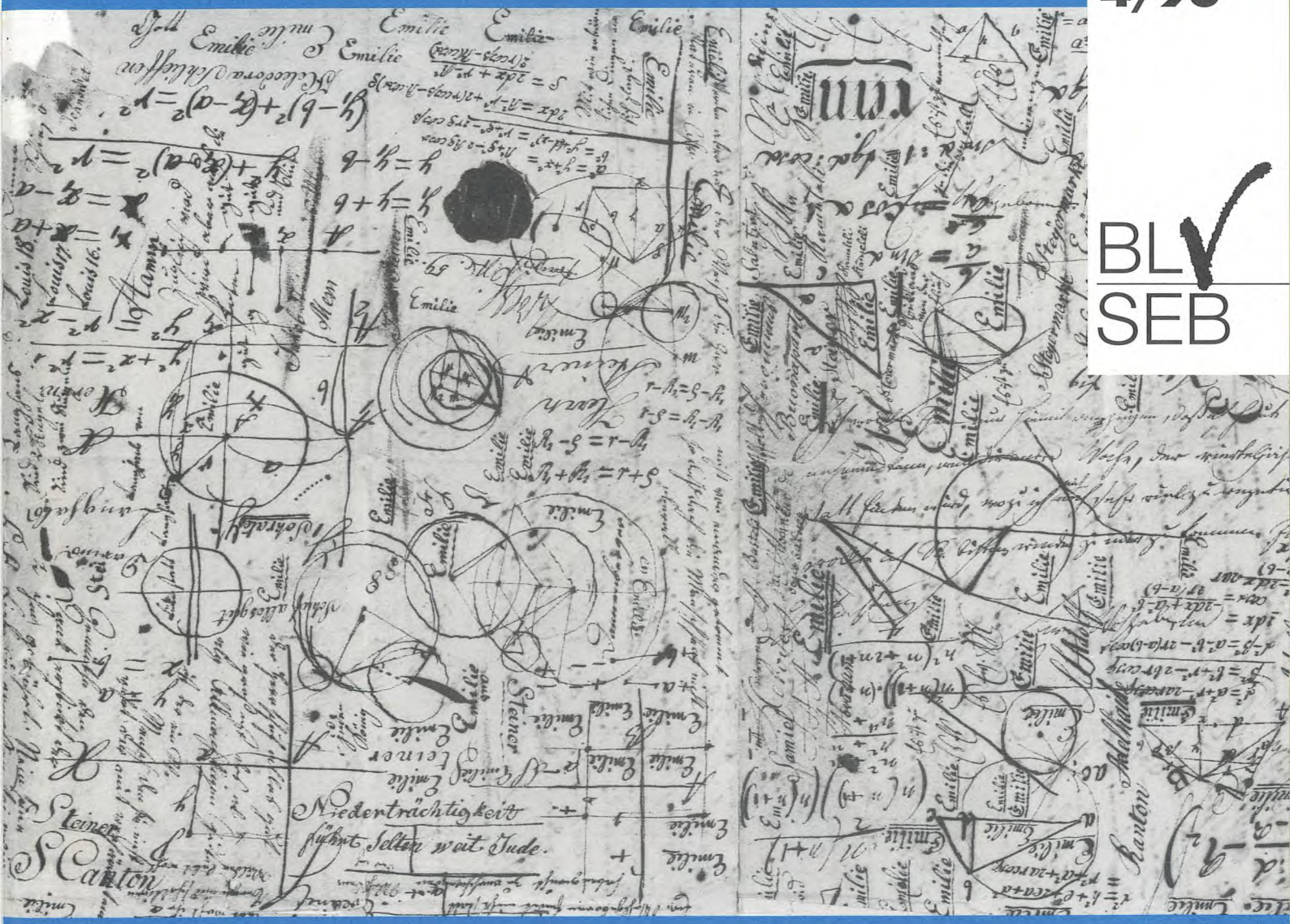
SCHULPRAXIS

4/96

BL
SEB



DIE MATHEMATIK VON JAKOB STEINER

Würdigung des Mathematikers

Anwendung seiner Sätze
im Unterricht

Mathematik in der Schulpraxis

Mathematik ist in der Schulpraxis ein Gebiet, das bis dahin wenig zur Sprache kam. Dank des Gymnasiallehrers Ulrich Schweizer, der sich im Zusammenhang mit der Gedenkfeier von Jakob Steiner in Utzenstorf mit der Biographie des Mathematikers beschäftigte, konnte diese Nummer entstehen.

Die Autoren, es sind dies hauptsächlich Mathematiklehrer der Sekundarstufe I und II, haben unter seiner Führung diese Nummer zusammengestellt. Von Herrn Schweizer stammt das Konzept, er hat die Autoren ausgewählt, das Material zusammengetragen, zum Teil für mich unlesbare Mathematikprogramme so umgeschrieben, dass ich sie weiterverarbeiten konnte, und schliesslich in der Burgerbibliothek in Bern die Quellenbestände von Jakob Steiner durchgearbeitet. Ihm möchte ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen für die wichtige Arbeit, die er zum Gelingen dieser Nummer geleistet hat. Ihm ist es auch gelungen, Herrn Fred Eggenberg für die Idee zu gewinnen, den Mathematiker Jakob Steiner zu würdigen. Als Fachdidaktiklehrer am Sekundarlehramt in Bern hat sich Herr Eggenberg für das Thema begeistern lassen, um mit seinen Studenten (und Studentinnen – an dieser Nummer haben aber nur Männer mitgewirkt) auf diesem Gebiet zu arbeiten. Meine Mitarbeit an dieser Nummer beschränkt sich auf die Verarbeitung der Texte zu einem druckreifen Ganzen. Gemeinsam hoffen wir aber, einen wertvollen Beitrag für den Mathematikunterricht an der Sekundarstufe I geleistet zu haben.

Die folgende Nummer wird sich mit der Frage des Umgangs mit der Zeit auseinandersetzen.

Schulpraxis – Zeitschrift des Bernischen Lehrerinnen- und Lehrervereins

84. Jahrgang

Herausgeber
Bernischer Lehrerinnen- und Lehrerverein
Sekretariat, Postfach, 3000 Bern 7
Telefon 031 311 34 16
Telefax 031 311 26 05

Redaktion
Irene Hänsenberger
Pleerweg 44, Postfach 147
3402 Burgdorf
Telefon 034 423 14 18
Telefax 034 422 62 94

Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter dieser Nummer
Brönnimann Kenneth, Student SLA, jetzt Sekundarlehrer, Breisacherstrasse 73, 4057 Basel

Eggenberg Alexandre, Student SLA, jetzt Sekundarlehrer, Hauptstrasse 188, 3855 Brienz

Eggenberg Fred, Dozent SLA, jetzt pensioniert, Mühlestrassse 10, 3507 Biglen

Markus Ledermann, Student SLA, jetzt Sekundarlehrer, Grünauweg 20, 5726 Unterkulm

Schweizer Ulrich, Gymnasiallehrer für Mathematik am Gymnasium Alpenstrasse Biel, Ahornweg 5, 2575 Hagneck

Wüthrich Christian, Student, Oberdorfstrasse 50, 3427 Utzenstorf

Titelbild
Notizen von Jakob Steiner, Original in der Burgerbibliothek Bern unter der Nummer Mss.h.h.XXIb. 345

Inseratenverwaltung
ofa Orell Füssli Werbung AG
Laupenstrasse 35, Postfach, 3001 Bern
Telefon 031 387 21 11
Telefax 031 381 21 00
Anzeigenmarketing: Michael Herzig

Abonnemente
Fr. 19.– jährlich für Mitglieder BLV
Fr. 22.– jährlich für Nichtmitglieder
Mitglieder Fr. 10.–
Nichtmitglieder Fr. 14.–
4 Nummern jährlich
Bestellungen und Adressänderungen: Sekretariat BLV/SEB, Postfach, 3000 Bern 7

Nächste Ausgabe
März 1997
Thema: Vom Umgang mit der Zeit

Druck: Rickli + Wyss AG
Eymattstrasse 5, 3027 Bern

INHALT

Würdigung des Mathematikers

Anwendung seiner Sätze im Unterricht

Einleitung: Jakob Steiner – 200 Jahre – Jakob Steiner

Ein berühmter Berner Mathematiker (Ulrich Schweizer) 4

Vorschläge für den Mathematikunterricht auf der Sekundarstufe I

Arbeitsvorschläge und Aufgabenstellungen für den Mathematikunterricht auf der Sekundarstufe I
Überarbeitete Fassung für die Schulpraxis, erarbeitet von Studenten des SLA in der Fachdidaktik
(Autorenteam Markus Ledermann, Alexandre Eggenberg, Kenneth Brönnimann) 5

Offene Situationen

(Fred Eggenberg) 16

Jakob Steiner – Bausteine zu einem Lebensbild

(Ulrich Schweizer) 21

Kreisketten

(Christian Wüthrich) 27

Spuren einer Aufgabe

(Ulrich Schweizer) 29

ZU DIESEM HEFT

Die letzte Nummer der Schulpraxis würdigte den berühmten Pädagogen Johann Heinrich Pestalozzi, dessen 250-Jahre-Jubiläum in diesem Jahr gefeiert wurde. Diese Nummer bildet in doppelter Beziehung eine natürliche Überleitung zu einem neuen Thema. Erstens hat auch dieses Mal ein Jubiläum zur Gestaltung dieser Schulpraxis Anlass gegeben und zweitens steht diese Person – es handelt sich um Jakob Steiner – erst noch in Beziehung zu Pestalozzi, indem er als Pestalozzi-Schüler ab 1813 in Iferten Pestalozzis Unterricht genoss. Vom Thema her wird sich diese Nummer jedoch ganz anders gestalten, da Steiner sich als Mathematiker einen Namen machte und diese Nummer sich deshalb vor allem auf die Würdigung seiner Persönlichkeit konzentriert, wie auch in hohem Mass mathematische Themen in diesem Zusammenhang behandelt.

Dieses Heft beinhaltet viele praxisbezogene Anregungen für den Mathematikunterricht auf der Sekundarstufe I. Hinweise auf bereits gemachte Erfahrungen von Mathematiklehrern, Anregungen zur Anwendung der Unterrichtsmethode «Arbeiten in offenen Situationen», Unterrichtshilfen und Arbeitsblätter zum Kopieren, sowie eine breite Palette von biographischen Informationen über den Mathematiker Jakob Steiner sind hier nebeneinander aufgeführt und sollen Lehrerinnen und Lehrern als Grundlage für ihren eigenen Unterricht dienen.

Indem im Bereich der Mathematik ein Thema aufgenommen wird, das auch in ein kulturelles Umfeld gestellt wird, wird hier der Forderung des neuen Lehrplans Rechnung getragen, Mathematik in einen kulturellen Rahmen zu stellen und Kenntnisse auch von wichtigen Mathematikerinnen und Mathematikern zu vermitteln. Die Person von Jakob Steiner, seine Lebensgeschichte, sein Beziehungsnetz spielen hier eine ebenso wichtige Rolle wie seine mathematischen Errungenschaften. Die Kenntnisse dieser Daten können sogar dazu beitragen, das Interesse von Schülerinnen und Schülern an den mathematischen Problemen zu wecken, mit denen sich Jakob Steiner, wie auch viele andere Mathematik-Interessierte nach ihm, auseinandersetzte. Wenn damit vielleicht auch Platz für mehr Verständnis für mathematische Aufgabenstellungen geschaffen wird, ist in doppelter Beziehung ein Lernerfolg erzielt.

Ich bin der Meinung, dass es Herrn Ulrich Schweizer gelungen ist, mit seinen sehr verschiedenen Beiträgen ein Bild von Jakob Steiner aufzuzeichnen, das in dieser Vielseitigkeit und Vielschichtigkeit sowohl durch die zeitlichen Verschiebungen zum Beispiel der Lexikon-Auszüge, wie auch durch die verschiedenen Blickwinkel, durch die das Thema beleuchtet wird, ein abgerundetes Ganzes darzustellen vermag.

Irene Hänsenberger

EINLEITUNG

Jakob Steiner – 200 Jahre – Jakob Steiner

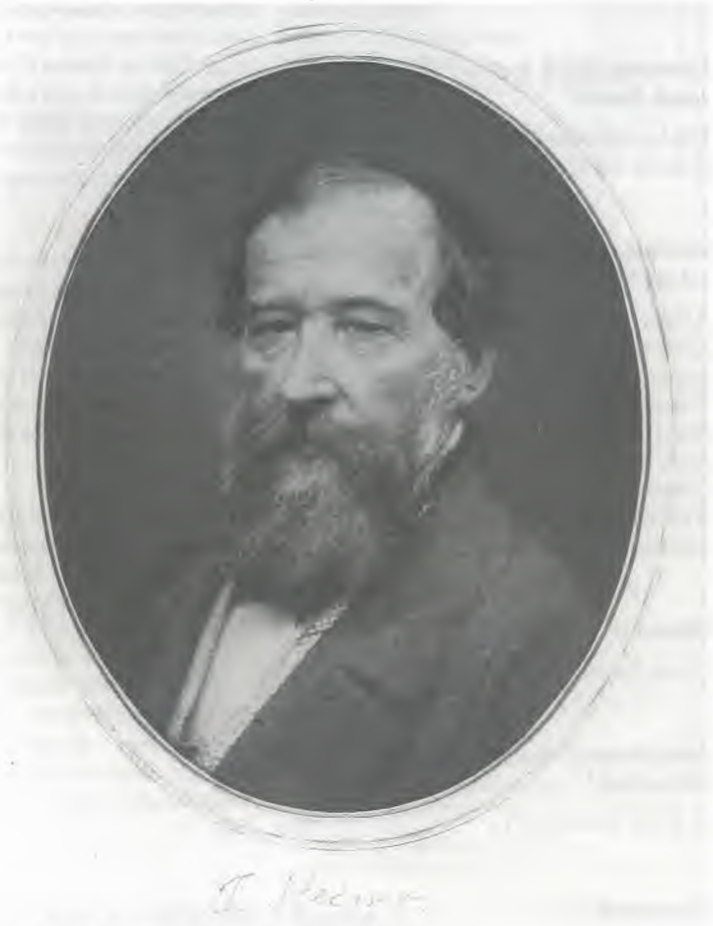
Ein berühmter Berner Mathematiker
1 2 3 4

Ulrich Schweizer begründet in dieser Einleitung, weshalb es sinnvoll erscheint, anhand der Person und der Lebensgeschichte von Jakob Steiner fächerübergreifend ein Thema zu behandeln, das sowohl mathematische wie auch geschichtliche Fragestellungen beinhaltet.

4. Es steht im neuen Lehrplan, dass zur «Mathematik» auch der kulturelle Rahmen oder die kulturelle Einbettung gehört, inklusive der Kenntnis wichtiger Mathematikerinnen und Mathematiker. Die Idee, die dahinter steht, ist auch folgende: Mathematik soll vermehrt auch als Prozess verstanden werden; Mathematik entsteht fortwährend in jedem Kind. Indem (exemplarisch) Themen aus der Geschichte der Mathematik eingebaut werden, kann dem Anliegen, zu zeigen, wie Mathematik entsteht, entsprochen werden. Es kann für eine lernende Person auch nützlich sein zu sehen, wie ein Mathematiker arbeitet oder gearbeitet hat. Nicht Beweise und die gefürchtete mathematische Strenge stehen am Anfang der Arbeit, sondern Beobachten, Experimentieren, Analogisieren und Intuition. Der Übergang zu Formalismen und die strenge, elegante Beweisführung bilden den Abschluss des Erkenntnisprozesses (nach «Der Mathematik-Unterricht», Nr. 39/6 (1993), S. 3).

3. Es kann ein Lebensbild entstehen (interdisziplinär), das die (nähere) Umgebung einbezieht und damit die Schülerinnen und Schüer direkt anspricht und betrifft. So ist interdisziplinäres Arbeiten sinnvoll möglich (gemäss Lehrplan).

2. Eine Person kann auch durch unsere Beschäftigung mit ihrem Lebenswerk berühmt werden, durch Beziehungen mit andern Menschen dieser Zeit. Es entsteht ein ganzes Beziehungsnetz (und Personennetz). Steiner ist als Pestalozzischüler auch für die heutige Mathematikdidaktik wichtig und interessant.



Portrait Jakob Steiner, Burgerbibliothek Bern

1. Es gibt noch andere (ebenso berühmte) Persönlichkeiten, zum Beispiel die Personen, die auf unseren Banknoten abgebildet sind, wie der Mathematiker Leonard Euler auf der Zehnernote.
Es erscheint mir wichtig, dass durch die Beschäftigung mit einer Person (z.B. Lokalgrösse) ein Netz von Beziehungen entsteht zwischen verschiedenen Fächern, aber auch zwischen verschiedenen Personen oder verschiedenen historischen Ebenen (zeitlich, räumlich, sachlich).

zeitlich

Lebensdaten von Jakob Steiner – wie sah das Dorf Utzenstorf damals aus? Was geschah damals politisch in der Schweiz? – Was war in Europa (hier insbesondere in Deutschland) damals los? – Was geschah weltweit? Welche Persönlichkeiten sind Steiner begegnet? (Gotthelf, Pestalozzi, W. und A. von Humboldt, Jacobi, ...)

räumlich

Die Gegensätze zwischen dem ländlichen Gebiet um Utzenstorf (Jugendzeit) und den städtischen Verhältnissen von Berlin. Auch die andern Wirkungsorte Jakob Steiners sind erwähnenswert: Yverdon (französischsprachig), Heidelberg (berühmte Universität; hier lernt Steiner verschiedene später berühmte Schweizer kennen), Bern (Lebensende; Gedenktafel im heutigen Konservatorium).

sachlich

Bildung und Schule, Vorstellungen und Verwirklichungen, europäisches Denken und Handeln damals und jetzt, grosse Politik und Einzelschicksal, Entwicklungsgeschichte der Mathematik ...

U. Schweizer

VORSCHLÄGE FÜR DEN MATHEMATIKUNTERRICHT AUF DER SEKUNDARSTUFE I

Anwendungen von Jakob Steiners Lehrsätzen im Unterricht

Arbeitsvorschläge und Aufgabenstellungen mit Kommentar

Das Autorenteam Ledermann, Eggenberg und Brönnimann hat anlässlich einer Gruppenarbeit in der Fachdidaktik Mathematik des Sekundarlehramtes Bern unter der Führung des Dozenten Fred Eggenberg Vorschläge für den Mathematikunterricht auf der Sekundarstufe I erarbeitet und diese in eine Fassung für die Schulpraxis umgeschrieben.

Ulrich Schweizer und Fred Eggenberg betreuten die Arbeit in beratender Funktion.

1. Steiners Erkenntnisse

Jakob Steiner wird 1832 zum Ehrendoktor ernannt. Im Sommer 1833 kehrt er erstmals nach 15 Jahren in sein Heimatdorf zurück. Wieder in Berlin, wird er 1834 nach der Veröffentlichung einer Schrift über die synthetische Geometrie zum Professor für Mathematik ernannt. Seine erste Arbeit an der wissenschaftlichen Akademie heisst «Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze». Darin zeigt er unter anderem, dass

1.1 ein Dreieck mit den gegebenen Schenkeln a und b dann am grössten ist, wenn der Winkel zwischen den Schenkeln 90° beträgt.
1.2 von beliebigen Dreiecken mit gleicher Basis und gleichem Flächeninhalt das gleichschenklige dasjenige mit dem kleinsten Umfang ist.
1.3 unter allen Figuren gleicher Fläche der Kreis diejenige mit dem kleinsten Umfang ist.
1.4 unter allen Körpern gleichen Volumens die Kugel diejenige kleinster Oberfläche ist.

2. Fragen aus Steiners Notizen und späteren Veröffentlichungen

2.1 Gesucht ist eine Figur möglichst kleinen Flächeninhalts, innerhalb der sich eine gegebene Strecke wenden lässt.
2.2 Welches ist der Punkt in einem Viereck beziehungsweise in einem Dreieck, von dem aus die Summe der Abstände zu den Ecken minimal ist?
2.3 Gegeben sei ein beliebiges Polyeder. Es besteht ein Zusammenhang zwischen der Anzahl Flächen, Kanten und Ecken. Steiner gibt für diesen Zusammenhang einen schönen Beweis an.(Polyeder: Körper, die von geradlinigen, ebenen Vielecken begrenzt sind).

3. Hinweise, Lösungen, Historisches

Zu 1.2 Ein Geometrischer Beweis:

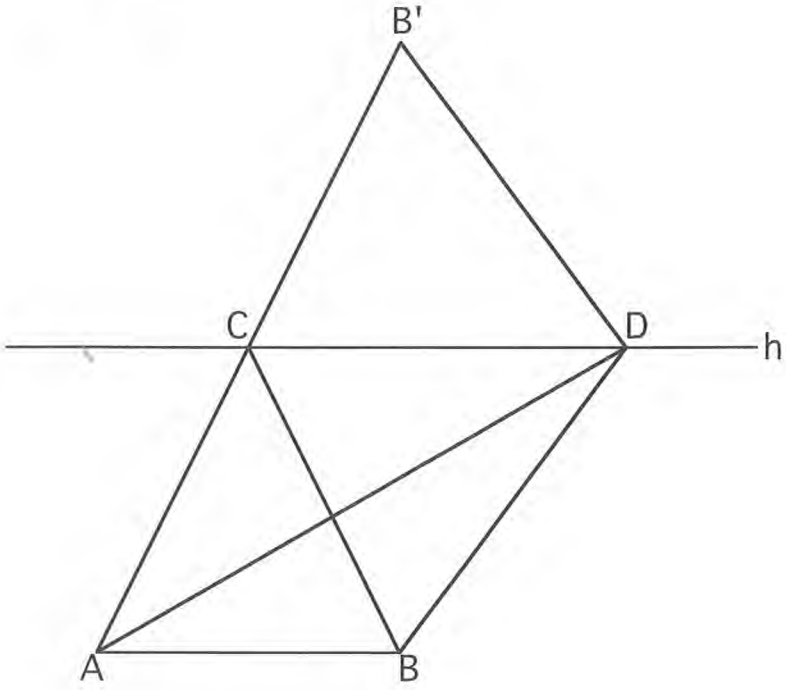
In der untenstehenden Skizze haben wir ein ungleichschenkliges Dreieck ABD und das entsprechende gleichschenklige Dreieck ABC. Nun wird B an h gespiegelt. Den Bildpunkt nennen wir B'. Es gilt:

$\overline{AD}+\overline{DB'} > \overline{AC}+\overline{CB'}$ und $\overline{BD}=\overline{DB'}$ und $\overline{BC}=\overline{CB'}$

daraus folgt: $\overline{AD}+\overline{BD} > \overline{AC}+\overline{BC}$

Die Addition von $\overline{AB}$ liefert die zu beweisende Beziehung:

$\overline{AD}+\overline{BD}+\overline{AB} > \overline{AC}+\overline{BC}+\overline{AB}$



Zu 1.3

Die folgende Aufgabe stammt zum Teil aus dem Berner Lehrmittel:

Dido, die Gründerin der Stadt Karthago, erhielt von den Einwohnern Nordafrikas ein Stück Land, «nicht grösser als was eine Ochsenhaut umspannen kann». Sie zerschnitt die Haut in schmale Streifen und knüpfte eine Leine daraus. Mit dieser umspannte sie die künftige Stadt.
a) Welche Form würdest du im Landesinnern wählen, um möglichst viel Land zu bekommen?
b) Welche Form würdest du für ein Stück Land an einer geraden Küste wählen? (Die Küstenlinie muss nicht bespannt werden.)
c) Dido möchte einen rechteckigen Stadtgrundriss, der auf der einen Seite vom Meer begrenzt wird. Welche Länge und welche Breite hat das Rechteck, das die grösste Stadtfläche liefert? (Die Küstenlinie muss nicht bespannt werden.) Nimm zur Lösung dieser Aufgabe an, die Leine sei 25 km lang.
Hinweise: Aufgaben a) und b) haben experimentellen Charakter. Zur Lösung von Aufgabe c) schlagen wir vor, die Tabelle auf dem Arbeitsblatt 1. zu verwenden.

Lösungen:
a) Kreis b) Halbkreis c) Länge 12.5 km, Breite 6.25 km

Zu 2.1

Wir schlagen vor, diese Aufgabe experimentell anzugehen.
Möglichkeiten: a) Eine Kreide dient als «Strecke», die auf der Wandtafel gewendet wird. Die überstrichene Fläche wird sichtbar.
b) Eine dünne Mehlschicht wird auf eine dunkle Fläche gestreut, auf der ein Kartonstreifen ($\cong$ Strecke) gewendet wird. Die überstrichene Fläche wird freigelegt.

Foto K. Brönnimann

Foto K. Brönnimann

Hinweise:
Die Inhalte der überstrichenen Flächen können mit Hilfe von Millimeterpapier gemessen und miteinander verglichen werden.
Lösungen:
Das Problem wurde erst in diesem Jahrhundert von Besicovitsch gelöst. Er fand heraus, dass es Flächen beliebig kleinen Inhalts mit der Umwendeeigenschaft gibt. Diese Flächen sind allerdings stark zerfasert.

Zu 2.2

Folgende Aufgaben versuchen das Problem zu veranschaulichen:
a) Eine Computerfirma beschliesst, für die vier Verkaufsstellen in Columbia (USA), Los Angeles (USA), Lincoln (USA) und Mexico City (Mexiko) ein Verteilzentrum zu errichten. Gebaut werden soll das Zentrum an dem Ort, von dem aus die Summe der Distanzen (Luftlinie) zu den vier Ladenstandorten minimal ist. Wo wird das Verteilzentrum erstellt?
b) Die Leitung der Thomas Corporation beschliesst, dass die Direktoren der drei Zweigniederlassungen in Winnipeg (Kanada), Jackson (USA) und Philadelphia (USA) zusammentreffen sollen, um über eine neue Verkaufsstrategie zu beraten. Da die Unternehmung die Flugtickets für die Reise bezahlen muss, soll das Treffen an dem Ort abgehalten werden, der die geringsten Reisekosten verursacht. (Annahme: Die Flugpreise richten sich nach der Luftliniendistanz.) Wo findet das Treffen statt?
c) Drei pensionierte Mathematiker wollen sich zum Gedankenaustausch nach langen Jahren wieder einmal treffen. Einer stammt aus Aarau, einer aus Sierre und einer aus Bad Ragaz. Der Aarauer hat nun die tolle Idee, das Treffen an dem Ort abzuhalten, von dem aus die Summe der Distanzen (Luftlinie) zu den drei Orten minimal ist. Hell begeistert nehmen die beiden anderen Mathematiker den Vorschlag an. Wo findet das Treffen statt?
Hinweise:
Als Grundlage zur Lösung der Aufgaben eignen sich die Karten im Schweizer Weltatlas sehr gut. Die hier gestellten Probleme haben stark experimentellen Charakter. Schön wäre es, wenn die Schülerinnen und Schüler im Experiment auf eine Vermutung stossen würden, um diese zumindest im Fall a) anschliessend zu begründen. Der Beweis, dass der gesuchte Punkt im Viereck gerade der Diagonalenschnittpunkt ist, ist aus einer Skizze leicht abzulesen. Im Dreieck präsentiert sich die Lage wesentlich komplizierter. Man kann zeigen, dass die Strecken vom gesuchten Punkt zu den Ecken des Dreiecks paarweise 120° einschliessen.

Lösungen:
a) Oklahoma City, b) Indianapolis, c) Emmen

Historisches: J.P. Gruson und seine Minimumaufgabe

Am 21. November 1816 diskutierte vor der königlichen Akademie der Wissenschaften in Berlin Johann Philipp Gruson (1768–1857) eine «geometrische Aufgabe über Minima». Als Anwendungsaufgabe formulierte er sein Problem so: «Man hat in einer Kantonierung oder Winterpostierung drei Posten A, B, C, welche die Lage eines spitzwinkligen Triangels bestimmen; man will zur Sicherung der Kommunikation zwischen diesen Posten noch einen vierten Posten oder ein Piket irgendwo in D so stellen, dass die dahin führenden Kommunikationswege AD, BD und CD zusammen genommen die möglichst kleinen werden, ...»

Zu 2.3

Hinweise zu Polyedermodellen.
Damit Schülerinnen und Schüler die Beziehung, die der (untenstehende) Polyedersatz ausdrückt, selber herausfinden können, sollten sie Polyedermodelle zur Verfügung haben. Es besteht die Möglichkeit, solche in einem Kaltschweissverfahren aus Acetatfolie herzustellen. Als Grundlage dienen Polyederabwicklungen.
Benötigtes Material:
Acetatfolie (erhältlich bei Schneider Farbwaren, Bern), Tetrahydrofuran (erhältlich in Apotheken), Messer, Tuschefeder.
Vorgehen:
1. Abwicklung aus Acetatfolie ausschneiden
2. gestrichelte Kanten mit dem Messer leicht einritzen
3. Polyeder falten und die Nahtstellen verschweissen, d. h. mit der Tuschefeder etwas Tetrahydrofuran auftragen

Lösung:
Anzahl Ecken + Anzahl Flächen = Anzahl Kanten + 2

4. Weitere Extremalaufgaben

Es handelt sich um weitere Extremalaufgaben ganz im Sinne von Jakob Steiner, wenn auch mit andern Methoden zu lösen.

Foto K. Brönnimann

4.1 Die Firma Hansi AG produziert Schokolade-Creme. Ein Team von Lebensmitteldesignern hat nun ein ganz neues Produkt (Schokolade-Creme mit Pfefferschoten) entwickelt. Diese Creme soll in 1-Liter-Büchsen verkauft werden. Um den Materialverbrauch möglichst gering zu halten, wird diejenige zylindrische Büchse verwendet, deren Oberfläche minimal ist. Bestimme Radius und Höhe dieser Büchse.
Hinweis:
Siehe dazu das entsprechende Arbeitsblatt 2.
Lösung:
Radius: 5.42 cm Höhe: 10.84 cm

4.2 Aus einem Karton (Format A4) soll eine Schachtel hergestellt werden. Dazu wird an jeder Ecke ein Quadrat der Seitenlänge x abgeschnitten. Nun kann man die Ränder hochbiegen und es entsteht eine Schachtel. Wie muss x gewählt werden, damit das Schachtelvolumen maximal wird?
Hinweis: Siehe dazu das Arbeitsblatt 3 «Die Schachtel mit dem grösstmöglichen Volumen».
Lösung:
Seitenlänge x: 4.04 cm

Foto K. Brönnimann

4.3 Suche das gleichschenklige Dreieck mit dem grösstmöglichen Umfang im gegebenen Kreis.
Hinweis:
Diese Aufgabe finden Sie mit einer entsprechenden Graphik auf dem Arbeitsblatt 4.
Lösung:
Das gleichseitige Dreieck

KOPIERVORLAGEN UND ARBEITSBLÄTTER

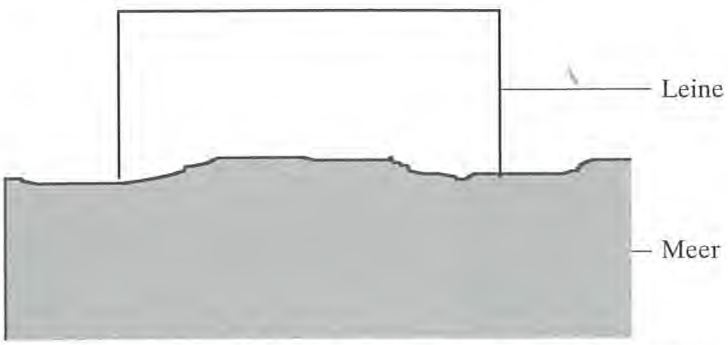
Arbeitsblatt 1: Dido, die Gründerin der Stadt Karthago

Dido, die Gründerin der Stadt Karthago, erhielt von den Einwohnern Nordafrikas ein Stück Land, «nicht grösser als was eine Ochsenhaut umspannen kann». Sie zerschnitt die Haut in schmale Streifen und knüpfte eine Leine daraus. Mit dieser umspannte sie die künftige Stadt.
a) Welche Form würdest du im Landesinnern wählen, um möglichst viel Land zu bekommen?
b) Welche Form würdest du für ein Stück Land an einer geraden Küste wählen? (Die Küstenlinie muss nicht bespannt werden.)
c) Dido möchte einen rechteckigen Stadtgrundriss, der auf der einen Seite vom Meer begrenzt wird. Welche Länge und welche Breite hat das Rechteck, das die grösste Stadtfläche liefert? (Die Küstenlinie muss nicht bespannt werden.) Nimm zur Lösung dieser Aufgabe an, die Leine sei 25 km lang.

Annäherung des grössten Rechtecks:

Länge der Leine [km]	Breite des Rechtecks [km]	Länge des Rechtecks [km]	Fläche des Rechtecks [km²]
25	4.5		
25	4.75		
25	5		
25	5.25		
25	5.5		
25	5.75		
25	6		
25	6.25		
25	6.5		
25	6.75		
25	7		
25	7.25		

Analytische Lösung der Aufgabe c)



Gesucht ist die maximale Fläche $x \cdot y$ bei gegebenem Umfang U.
Der Umfang setzt sich wie folgt zusammen: $U = x + 2y$

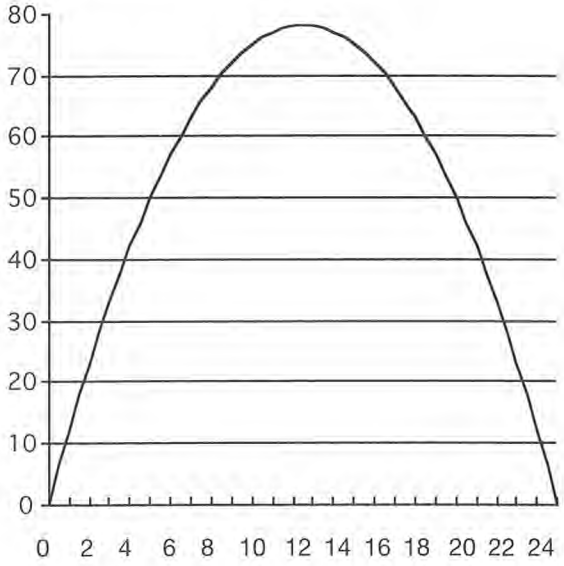
Wir lösen diese Gleichung nach y auf und erhalten: $y = \frac{(U - x)}{2}(1)$
Die Fläche F der Stadt wird aus $x \cdot y$ berechnet. Wir setzen nun (1) in diese Flächenformel ein und erhalten eine Funktion F(x):

$$F(x) = \frac{x(U - x)}{2} = \frac{1}{2}(Ux - x^2)$$

Wir leiten nun diese Funktion ab und setzen gleich null.

$F'(x) = \frac{U}{2} - x$, also $\frac{U}{2} - x = 0$ Æ $x = \frac{U}{2}$ in (1) einsetzen ergibt: $y = \frac{U}{4}$

Die Funktion F(x) bei U = 25 km:



Ein synthetischer Beweis für die Lösung von c)

1. Teil: Hilfssatz

Bei gegebenem Umfang ist das Quadrat dasjenige Rechteck mit dem grössten Flächeninhalt.

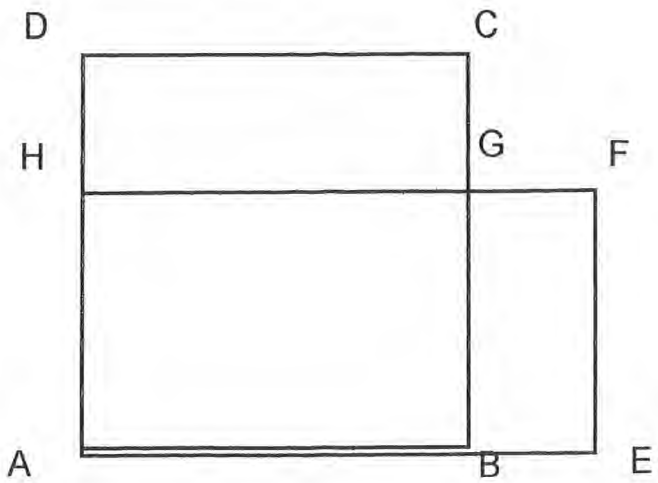
Beweis des Hilfssatzes:

Voraussetzung

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FH} + \overline{AH}$$

Folgerung

$$\overline{2AB} + \overline{2BC} = \overline{2AE} + \overline{2EF}$$
$$\overline{2AB} + 2(\overline{BG} + \overline{GC}) = 2(\overline{AB} + \overline{BE}) + 2\overline{BG}$$
$$2\overline{GC} = 2\overline{BE}$$
$$\overline{GC} = \overline{BE}$$



Zudem gilt

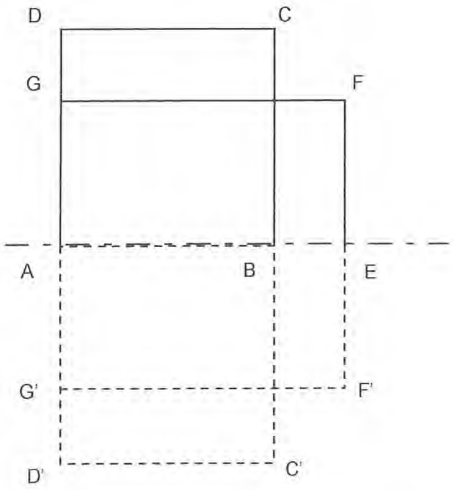
$$\overline{DC} > \overline{BG}$$

Daraus folgt

$$\overline{DC} \cdot \overline{GC} > \overline{BG} \cdot \overline{BE}$$
$$\overline{DC} \cdot \overline{GC} + \overline{AB} \cdot \overline{BG} > \overline{BG} \cdot \overline{BE} + \overline{AB} \cdot \overline{BG}$$
$$\overline{AB} \cdot \overline{BC} = \overline{AE} \cdot \overline{EF}$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

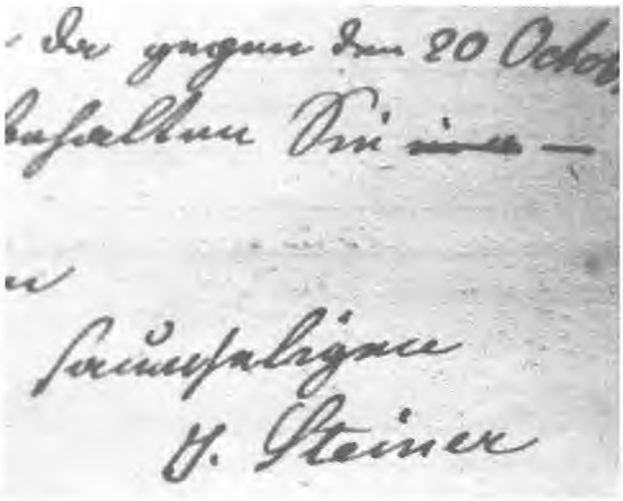
2.Teil: Beweis des Satzes



Voraussetzungen:

$$2\overline{AG} = \overline{AE}$$
$$\overline{AG} + \overline{GF} + \overline{FE} = \overline{AD} + \overline{DC} + \overline{BC}$$

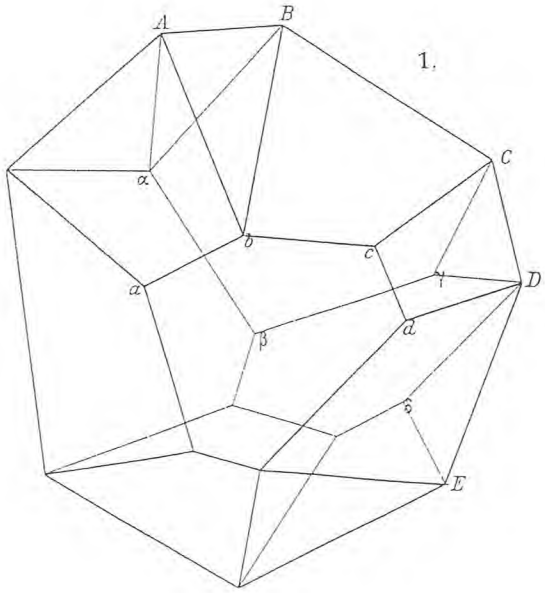
Die Punkte D', G', C' und F' entstehen durch Spiegelung an h. Nach dem Hilfssatz hat das Quadrat G'F'FG den grösseren Flächeninhalt als das Rechteck D'C'CD. Damit hat auch das Rechteck AEFG den grösseren Inhalt als das Rechteck ABCD.



Weshalb ist Fächerverbindung für den Mathematikunterricht wichtig?

Die Mathematik stellt Hilfsmittel zum Beschreiben, Verstehen und Bewältigen von Realproblemen zur Verfügung. Es waren und sind oft konkrete Fragestellungen, die Ausgangspunkt mathematischer Entwicklungen sind.
Bezüge zur aussermathematischen Realität waren immer im Mathematikunterricht vorhanden. Dadurch wurde und wird Mathematikunterricht abwechslungsreich und wirkt motivierend. Mathematik stellt damit auch einen Denkzugang dar.
Es muss ein pädagogisches Anliegen sein, Schubladendenken zu vermeiden, wo immer sich Gelegenheit dazu bietet. So gehören sicher auch fremdsprachige Texte in den Mathematikunterricht.

Leichter Beweis eines stereometrischen Satzes von Euler. Fig. 1.



Arbeitsblatt 2: 1-Liter-Büchse mit der kleinsten Oberfläche

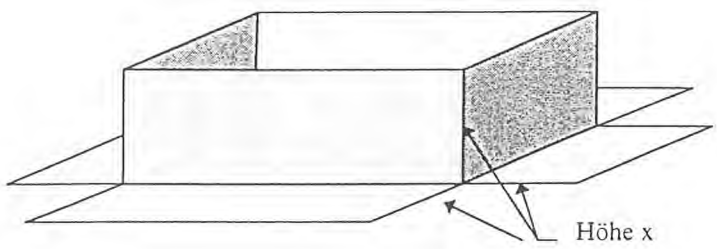
Die Firma Hansi AG produziert Schokolade-Creme. Ein Team von Lebensmitteldesignern hat nun ein ganz neues Produkt (Schokolade-Creme mit Pfefferschoten) entwickelt. Diese Creme soll in 1-Liter-Büchsen verkauft werden. Um den Materialverbrauch möglichst gering zu halten, wird diejenige zylindrische Büchse verwendet, deren Oberfläche minimal ist. Bestimme Radius und Höhe dieser Büchse.

Volumen [cm^3]	Radius [cm]	Höhe [cm]	Oberfläche [cm^2]
1000	3		
1000	3.5		
1000	4		
1000	4.5		
1000	5		
1000	5.5		
1000	6		
1000	6.5		
1000	7		
1000	7.5		
1000	8		

Arbeitsblatt 3: Die Schachtel mit dem grösstmöglichen Volumen

Aus einem Karton (Format A4) soll eine Schachtel hergestellt werden. Dazu wird an jeder Ecke ein Quadrat der Seitenlänge x abgeschnitten. Nun kann man die Ränder hochbiegen und es entsteht eine Schachtel. Wie muss x gewählt werden, damit das Schachtelvolumen maximal wird?

Quadratseite x = Schachtelhöhe [cm]	Schachtellänge [cm]	Schachtelbreite [cm]	Schachtelvolumen [cm^3]
2 2,5 3 3,5 4 4,5 5 5,5 6 6,5 7			

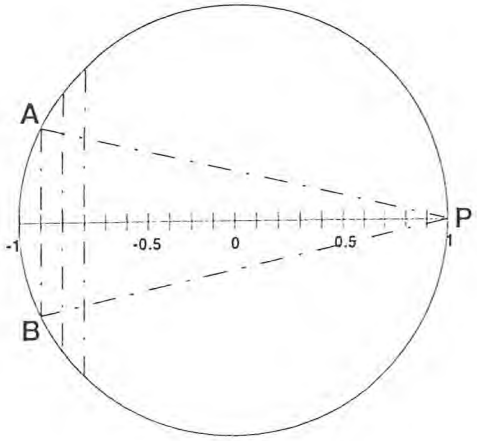


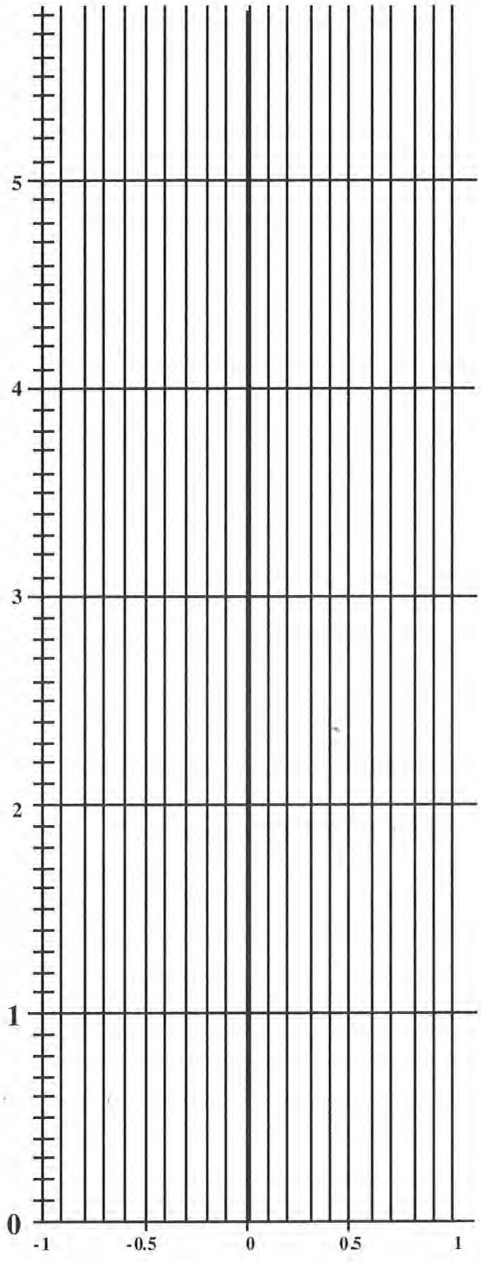
Arbeitsblatt 4: Das gleichschenklige Dreieck mit dem grösstmöglichen Umfang im Kreis

Suche das gleichschenklige Dreieck mit dem grösstmöglichen Umfang im gegebenen Kreis:

Zeichne die Sehnen AB von -1 bis 1 in den Kreis und trage die entstandenen Dreiecksumfänge mit dem Zirkel in die nebenstehende Tabelle ein.

Wo ergibt sich ein Maximum?





Weiterführende Informationen für die Lehrkraft zum Arbeitsblatt 4

(Gleichzeitig kann die Verwendung des Programmes MATHCAD vorgeführt werden)

Gesucht ist das in einem festen Kreis einbeschriebene Dreieck mit dem grössten Umfang

Wir wählen eine beliebige Sehne AB und lassen den Punkt P auf dem Kreis von -1 bis 1 wandern:

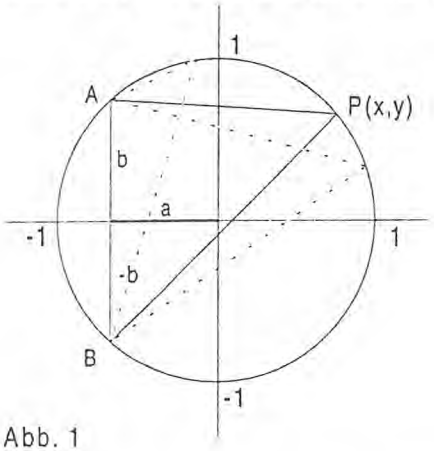


Abb. 1

Aus der Gleichung für den Einheitskreis werden die Ausdrücke für y und b gewonnen:

$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2}$ und $b = \sqrt{1-a^2}$. Dabei darf y > 0 angenommen werden.

Der Umfang setzt sich aus folgenden Strecken zusammen:

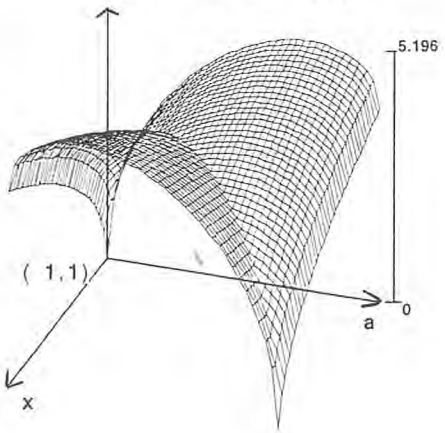
$$|AP| = \sqrt{(x-a)^2 + \left(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-a^2}\right)^2}\ ,\ |BP| = \sqrt{(x-a)^2 + \left(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-a^2}\right)^2}$$

und $|AB| = 2 \cdot \sqrt{1-a^2}$

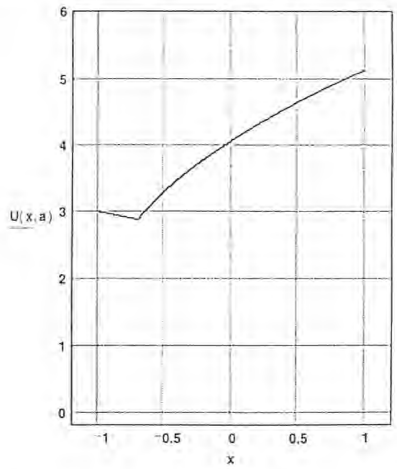
also U(x, a) = $|AP| + |BP| + |AB|$

Diese Funktion zweier Variablen kann dargestellt werden:

Abb. 3: Die Funktion U(x,a)



Es kann aber auch der Graph von U(x,a) in Abhängigkeit von x bei einem festen Wert für a, gezeichnet werden. Dazu werden die Variablen a und x «definiert»: x: = -1, -0.999... 1 und a: = -0.7



Es ergeben sich eindeutige Maxima für x = 1 oder x = -1. Das bedeutet, dass die gleichschenkligen Dreiecke jeweils den grössten Umfang haben (bei festem a).

In einem zweiten Schritt soll nun gezeigt werden, welches der möglichen gleichschenkligen Dreiecke den grössten Umfang hat:
Wir setzen den Punkt P nun bei (1, 0) fest und bewegen die Basis AB von x = -1 bis x = 1:

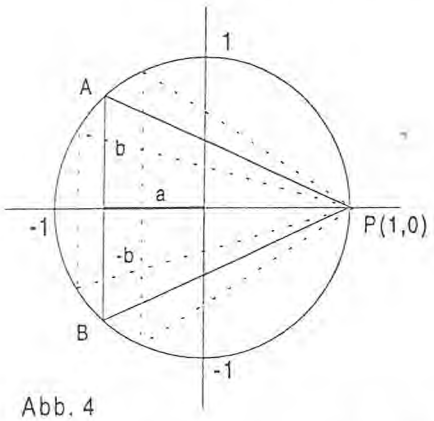
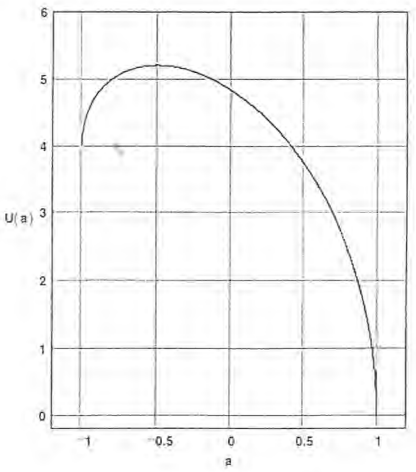


Abb. 4

Es ist nun $a^2 + b^2 = 1$ und der Umfang setzt sich wieder aus den Strecken AB, AP und BP (= AP) zusammen. Man erhält:

$$U(a) = 2 \cdot \sqrt{2 - 2a} + 2 \cdot \sqrt{1 - a^2}$$

Um den Graphen zu zeichnen, wird die Variable a definiert: a: = -1, -0.999... 1



Rechnung: $U'(a) = \frac{-2}{\sqrt{2-2a}} - \frac{2a}{\sqrt{1-a^2}} = 0$, falls $\sqrt{1-a^2} = -a \cdot \sqrt{2-2a}$, d.h.

$$2a^3 - 3a^2 + 1 = 0 = (2a+1)(a-1)^2$$

Die Lösung a = 1 fällt weg; es bleibt also a = -0.5 und damit U(-0.5) = $3\sqrt{3}$, d. h. es handelt sich um das gleichseitige Dreieck.

5. Hinweise zum Einsatz im Unterricht

Einer Klasse beziehungsweise einer Gruppe von Schülerinnen und Schülern, die sich bereits gewöhnt ist, mit offeneren Situationen umzugehen, könnte die Lehrkraft einfach die Biographie mit den Aufgaben/Problemen 1.1 bis 2.3 geben. Die Lerngruppe entscheidet dann selber, welcher konkreten Aufgabenstellung sie mit welcher Lösungsstrategie nachgehen will. Die Lehrkraft gibt allenfalls noch Anregungen und Impulse.
Ist sich eine Lerngruppe die Arbeit mit offeneren Situationen noch nicht so gewöhnt, dann kann die Lehrkraft die engeren Aufgabenstellungen unter 3. verwenden. Dabei muss es aber nicht bleiben. Es bietet sich die Möglichkeit, dass die Schülerinnen und Schüler anschliessend selber Aufgaben im entsprechenden Problembereich entwikkeln und lösen, dass sie versuchen, Aufgaben abzuändern, etc.
In diesem Sinne soll unser Artikel ein Beitrag zur Förderung der Phantasie im Mathematikunterricht sein.

6. Unterrichtserfahrungen an einer Sekundarschule von A. Eggenberg

Eine grosse Rolle spielt, wie stark sich eine Klasse offenere Situationen gewohnt ist. Für die Schülerinnen und Schüler der 9. Klasse der Sekundarschule Koppigen war es unangenehm, nicht zu wissen, wie sie die Aufgabe am besten angehen sollten und ob sie schwierig oder einfach zu lösen ist. Sie waren sich aus ihrer bisherigen Schulzeit gewohnt, Aufgaben zu bearbeiten, von denen sie wussten, dass sie in einer bestimmten Zeit lösbar sind. Neu war für die Schülerinnen und Schüler auch, auf die Frage nach der Richtigkeit des eingeschlagenen Lösungswegs von mir die Antwort zu erhalten: «Ja, vielleicht, probiert nur weiter!». Sie schätzten es jedoch sehr, frei entscheiden zu können, welches Problem sie zuerst studieren wollten. Trotz mehrerer Hinweise meinerseits, es sei besser, nur eine oder zwei Aufgaben zu lösen, diese dafür aber gründlich, hatten mehrere Schülerinnen und Schüler die Tendenz, möglichst viele zu bearbeiten.
Die schwierige Aufgabe der Lehrkraft besteht nun darin, genau das richtige Mass an Erläuterungen, Ideen und Lösungsvorschlägen vorzugeben. Gibt sie zuwenig vor, sind die Schülerinnen und Schüler überfordert, gibt sie zuviel vor, gleicht das Ganze eher einem Nachvollziehen gelöster Problemstellungen.
Dazu Beispiele zu einzelnen Aufgaben:
Aufgabe 2.1 (Strecke wenden):
Diese Aufgabe ist ohne Erläuterungen durch die Lehrkraft für die Schülerinnen und Schüler nur schwer verständlich. Vielleicht ist es auch nötig, gewisse Hinweise zum Vorgehen zu geben.
Aufgabe 2.2 (Punkt im Dreieck):
Es wäre wahrscheinlich sinnvoll, den Schülerinnen und Schülern schon zu Beginn zu empfehlen, möglichst grosse Testdreiecke zu verwenden, damit Differenzen zwischen verschiedenen Lösungsvorschlägen auch messbar werden. In einem spitzwinkligen Dreieck zum Beispiel liegt der Inkreismittelpunkt relativ nahe bei der Lösung, weshalb darauf hingewiesen werden muss, es auch an anderen (stumpfwinkligen) Dreiecken auszuprobieren.
Aufgabe 2.3 (Polyedersatz):
Dass der Zusammenhang zwischen der Anzahl Ecken, Kanten und Flächen mit einer Formel dargestellt werden kann, ist den Schülerinnen und Schülern nicht unbedingt von Anfang an klar.

7. Literaturverzeichnis

- BAPTIST, Peter: Über ein Extremwertproblem aus der Dreiecksgeometrie – historische und schulgeometrische Betrachtungen, DdM 3, 1990 (S. 210–222).
- BERNER LEHRMITTEL GEOMETRIE 2.
- HILBERT, David, COHN-VOSSEN, Stefan: Anschauliche Geometrie, Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, 1973.
- KRATZ, Johannes: Zentrale Themen des Geometrieunterrichts aus didaktischer Sicht, BSV München, 1993.
- KOLLROS, Louis: Jakob Steiner, Beihefte zur Zeitschrift «Elemente der Mathematik» Nr. 2, Birkhäuser Basel, 1947.
- MATHEMATIK LEHREN/Heft 46, Grosche Günter: Eine interessante geometrische Aufgabe.
- POSAMENTIER, Alfred S.: Arbeitsmaterialien Mathematik 119 Unterrichtseinheiten, Klett, 1988.
- WITTMANN, Erich Ch.: Elementargeometrie und Wirklichkeit, Vieweg

Alexandre Eggenberg, bis Sommer 96 Studium am Sekundarlehramt der Uni Bern mit den Fächern Mathematik, Geographie und Musik. Heute Sekundarlehrer an der Sekundarschule Brienz.

Kenneth Brönnimann, ist im Begriff, das Sekundarlehrer-Studium abzuschliessen, Unterrichtstätigkeit an Orientierungsschule in Riehen in den Fächern Mathematik und Geographie/Naturlehre.

Markus Ledermann, 1992–96 Ausbildung zum Sekundarlehrer an der Uni Bern in den Fächern Mathematik, Geographie, Zeichnen und Informatik. Heute Sekundarlehrer an der Sekundarschule Allschwil.

OFFENE SITUATIONEN IM MATHEMATIKUNTERRICHT

Der Fachdidaktiker Fred Eggenberg geht in diesem Beitrag auf die Unterrichtsmethode «Offene Situationen» ein. Aus eigenen Erfahrungen und denjenigen von Kollegen und Studenten ist hier ein Beitrag entstanden, der sich direkt auf die Praxis bezieht und der auch konkrete Beispiele zu dieser Methode liefert.

1. Vorbemerkung

«MOSIMA»

Materialien für «**O**ffene **Si**tuationen» im **Ma**thematikunterricht

Die Studierenden am Sekundarlehramt der Universität Bern stellen als Semesterarbeit teamweise «mosima's» zusammen.
Im Rahmen einer solchen Arbeit haben sich Kenneth Brönnimann, Alexandre Eggenberg und Markus Ledermann mit dem Thema «Jakob Steiner» befasst. Auch wenn diese Materialien nicht in ganz gleicher Form in eine Klasse hineingetragen werden können wie andere «mosima's», so zeigen Praxiseinsätze, dass Schülerinnen und Schüler sich sehr gerne mit «Steiner'schen Themen» auseinandersetzen.

Doch nun vorerst zur Frage: Was sind eigentlich «Offene Situationen» im Mathematikunterricht?

2. Wesen der «Offenen Situationen»

Ich verstehe unter «Offenen Situationen» im Mathematikunterricht eine Unterrichtsform, in welcher die Lehrperson die Klasse mit einer Begebenheit konfrontiert (Zahlenmaterial, Erlebnis, Alltagssituation usw.). Die Kinder stellen nun an diese Situation Fragen, welche sie erstens interessieren und die sie zweitens mit Hilfe von mathematischen Methoden beantworten können. Damit unterscheidet sich die «Offene Situation» deutlich von anderen Aufgabenstellungen (Technik, Einkleidung, Textaufgabe, Sachaufgabe). Charakteristisch scheint mir an der «Offenen Situation» zu sein:
- die selbständige Frage- und Problemstellung durch Schülerinnen und Schüler
- die Problemlösung auf selbstgewählten Lösungswegen und mit eigenen Problemlösungsstrategien.

2.2. Vor- und Nachteile

Hier seien einige wenige Punkte aufgeführt, die ich bei einer Diskussion der verschiedenen Unterrichtsformen als wichtig erachte:

2.2.1. «Geleiteter Mathematikunterricht»
(Traditioneller Unterricht mit Aufgabenstellungen wie Einkleidung, Text- und Sachaufgaben usw.)
- ist gut und relativ einfach zu planen und zu prüfen
- kann «portioniert» werden
- bildet sicheres (Grund-)Wissen
- oft ist die Erkenntnis aber an den Weg gebunden

2.2.2. «Offene Situation»
Die Lehrperson bietet eine «Landschaft» an!
- ist stark motivierend, lebensnah
- vielseitige Förderung (z.B. vernetztes Denken, fächerübergreifendes Arbeiten)
- Kinder müssen sich klar ausdrücken können
- ist nur beschränkt produktorientiert («der Weg ist das Ziel»)
- das Arbeiten mit den verschiedenen Materialien muss gelernt werden

2.2.3. Gewichtung
Mir scheint ganz klar, dass ein «geleiteter Mathematikunterricht» die Priorität hat und in gewohnter Art durchgeführt werden muss (erweitert durch neue Unterrichtsformen). Daneben erschrecken mich Untersuchungen, welche zeigen, dass Kinder einerseits eine «Schulmathematik» benutzen, die sie in der Schule einsetzen, und andererseits eine «Alltagsmathematik» gebrauchen, die sie im täglichen Leben anwenden. Diese beiden Mathematikgewohnheiten der Schülerinnen und Schüler sind jedoch nicht deckungsgleich. Hier denke ich, ist es absolut notwendig, dass als weitere Unterrichtsform die «Offene Situation» in den Mathematikunterricht Einzug halten muss.

3. Didaktisches

3.1. Einsatz

Ich habe (in der letzten Zeit meiner Volksschulpraxis) jede Klasse in jedem Quartal mindestens einmal mit einer «Offenen Situation» konfrontiert (Grössenordnung 2 bis 5 Lektionen). Die Motivation der Kinder, ihr Interesse, ihre Lernbereitschaft und ihre Lernfortschritte wogen die «verlorenen» Lektionen bei weitem auf.
Ich bin heute überzeugt, dass damit Wesentliches für das Mathematikverständnis getan wird.
Das ist Vorbereitung aufs Leben!

3.2. Einführungsmöglichkeiten

Mit einer Klasse, die noch nie mit «Offenen Situationen» gearbeitet hat, bin ich in der Einführungsphase folgendermassen vorgegangen:

3.2.1. Enge Fragestellung
Zur vorgegebenen Situation stellt die Lehrperson enge Fragen. Die Kinder lösen mit Hilfe mathematischer Methoden diese Frage- und Problemstellungen. Also ganz traditionelles Vorgehen.

3.2.2. Frage- und Problemstellungen suchen
Gruppenweise stellt die Klasse weitere Fragen zusammen, die an die gegebene «Landschaft» gestellt werden können.

3.2.3. Diskussion
Die gefundenen Fragen werden mit der ganzen Klasse diskutiert, und dann nach weiteren Gesichtspunkten gruppiert, resp. hinterfragt, wie z.B.
- was ist Interessantes an dieser Fragestellung
- welche Lösungswege sind sinnvoll
- welches Zusatzmaterial braucht man
- wo und wie könnte dieses Zusatzmaterial beschafft werden usw.

3.2.4. Anwenden mathematischer Methoden
Jede Gruppe löst nun eine (oder mehrere) der diskutierten Frage- und Problemstellungen.

Ab der dritten und vierten Konfrontation der Kinder mit einer «Offenen Situation» können nun Punkte weggelassen werden (Fragestellungen durch die Lehrperson; Fragestellungen in der Klasse besprechen). Mit der Zeit arbeitet die Klasse selbständig an der «Offenen Situation», an der dargebotenen «Landschaft».

3.3. Vorbereitungsarbeiten der Lehrperson

Für die Lehrperson ist es ein absolutes Muss, dass sie sich vorgängig mit dem Thema der «Offenen Situation» auseinandersetzt. Das heisst unter anderem, dass sie

- der Klasse ihre Erwartungen «signalisiert»
- sich mögliche Frage- und Problemstellungen überlegt
- «in der Schublade» weitergehendes Material bereithält
- sich eventuell mit aussenstehenden Personen abgesprochen hat, die von der Klasse um Hilfe oder Rat angegangen werden könnten.

Es gibt – glücklicherweise – noch genügend Überraschungen, wenn die Schülerinnen und Schüler mit ihren Ideen kommen.

4. Themen für «Offene Situationen»

4.1. Lösen von Optimierungsaufgaben

Als Ergänzung zum Beitrag «Jakob Steiner» von Brönnimann-Eggenberg-Ledermann seien hier noch zwei weitere Praxisberichte vorgestellt, die sich mit «Steiner'schen Optimierungen» befassen:

4.1.1. Umfang und Flächeninhalt

Herr Pierino Humbel hat mit 8.- und 9.-Klässlern der Sekundarschule Biglen untersucht, wie der Umfang von Drei-, Vier- und Fünfecken bei gleichbleibendem Flächeninhalt optimiert werden kann.

Die Klassen waren noch nicht gewohnt, mit «Offenen Situationen» umzugehen, deshalb hat er die Schülerinnen und Schüler mit engen Frage- und Problemstellungen gezielt geführt. Diese Vorgehensweise ist meiner Meinung nach eine gute Möglichkeit, mit einer Klasse in einen situativen Problembereich einzusteigen.

Die Aufgabenstellungen von Pierino Humbel lauteten:

Problemstellung:

Bei gleichbleibendem Flächeninhalte soll der Umfang einer Figur möglichst klein bleiben.

1. Auf dem Nagelbrett «zeichnet» ein Gummiband ein Dreieck. Seite a sowie Höhe sind gegeben. Zeichne mit diesen Angaben 5 beliebige Dreiecke und miss jedesmal den Umfang. Erstelle eine Tabelle mit den Spalten a, b, c, h, U, F.

2. Gegeben ist ein Rechteck mit festem Flächeninhalt (z.B. 144 cm^2). Zeichne mindestens 7 verschiedene Rechtecke mit beliebigen Seitenlängen. Erstelle dazu eine Tabelle mit den Spalten a, b, U, A.

3. Zeichne beliebige Fünfecke mit gleichem Flächeninhalt (aus Dreiecken), Miss die Umfänge der Gesamtfiguren und erstelle eine Tabelle mit den Spalten a, b, c, d, e, U, A.

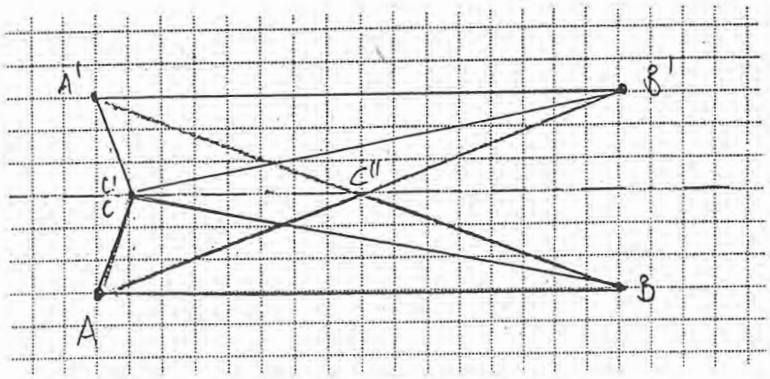
4. Zurück zum Dreieck (Aufg. 1): Versucht, Eure Erkenntnis aus obigen Experimenten zu beweisen. Hilfe: Benützt die Kongruenzabbildungen (Translationen, Achsenspiegelungen usw.)

5. Praxis: Der Rand des Apfelkuchens ist nicht bei allen Leuten beliebt, deshalb soll ein Kuchen von 900 cm^2 so hergestellt werden, dass möglichst viel Früchte und möglichst wenig Rand gegessen werden muss. Wie wird der Kuchen wohl aussehen? Begründet.

6. Äussert Euch gesamthaft zu den Aufgaben 1 bis 5. Versucht einen allgemeingültigen Lehrsatz zu schreiben, der die Optimierungsprobleme kurz und bündig umschreibt.

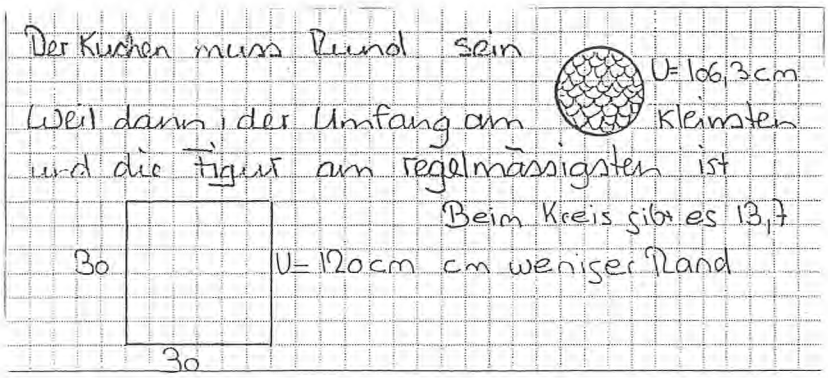
Antworten von Schülerinnen und Schülern:

Zur Aufgabe 4:
Alle haben Dreiecke gespiegelt an einer Parallelen zur Seite c, die durch C verläuft. So erhielten sie die Punkte A' und B':



- Wenn die Verbindungslinie A'B' eine Gerade ist, so ist der Umfang am kleinsten (gleichschenkliges Dreieck).
- Bei gleichem Flächeninhalt ist der Umfang am kleinsten, wenn die Figur möglichst regelmässig ist. Der kürzeste Weg von Figur zu Figur ergibt ein gleichschenkliges Dreieck.
- Die Verbindung AB' bzw. A'B ist am kürzesten, wenn sie gerade ist → es entsteht ein gleichschenkliges Dreieck → kleinstmöglicher Umfang bei gleicher Fläche und Höhe.
- Je regelmässiger die Figur, desto kleiner der Umfang. Je kleiner der Abstand von B zu A', desto kleiner der Umfang
- Der Weg von A nach B' ist dann am kürzesten, wenn das Ursprungsdreieck gleichschenklig ist.

Zur Aufgabe 5:



- Die Kuchen müssen rund aussehen, weil das die regelmässigste Figur ist.
- Er muss ein regelmässiger Kreis sein! Ein Rechteck hat mehr Rand als ein Kreis, → Kreis ist am «direktesten», der Kreis ist die «regelmässigste» Figur!
- Der Kuchen muss kreisförmig sein! Je regelmässiger die Figur, desto kleiner der Umfang!

Zur Aufgabe 6:

- Bei gleichbleibender Fläche ist der Umfang am kleinsten, je regelmässiger die Figur ist.
- Damit der Umfang möglichst klein ist, muss man die Figur möglichst regelmässig zeichnen. Die Aufgaben waren ziemlich interessant und wir haben etwas Sinnvolles dazugelernt.
- Bei einer Figur mit gleichbleibender Fläche ist der Umfang bei der regelmässigsten Figur am kleinsten. Die Aufgaben sind nicht sehr schwer, aber man braucht relativ lange, bis man sie kapiert.
- Je regelmässiger die Figur, desto kleiner der Umfang. War eine interessante, lehrreiche Abwechslung gegenüber dem üblichen Mathunterricht!
- Wir finden dieses Projekt gut, denn die Aufgaben waren nicht so schwierig zu lösen.

4.1.2. Optimierung einer Kegeloberfläche

Die Projektgruppe Mathematik stellte – im Rahmen einer Umsetzungs-Untersuchung des Neuen Lehrplanes – Kindern (vom Kindergarten bis zum 9. Schuljahr) die folgende Aufgabe:

> Cornet-Problem
> Forme aus einem Kreis ein Cornet so, dass Du möglichst viel Soft-Ice hineinfüllen kannst. Das Soft-Ice darf nicht über den Cornet-Rand ragen. Ihr müsst dabei herausfinden, um wieviel sich der Kreis überlappen muss!
> (Material: Kreise aus Halbkarton, Schere, Geodreieck)

Schülerinnen und Schüler des Kindergartens und der Primarschule gingen rein experimentell an die Lösung dieses Problems, indem sie aus Kreisen verschiedene «Cornets» schnitten und mit Sand (oder anderem Material) die Füllmenge und somit die Volumengrösse bestimmten.

Eine 9. Klasse der Sekundarschule Spiez (Lehrer Beat Wälti) hat sich unter anderem folgende Überlegungen gemacht:

4.1.2.1. Protokoll einer ersten Gruppenarbeit:

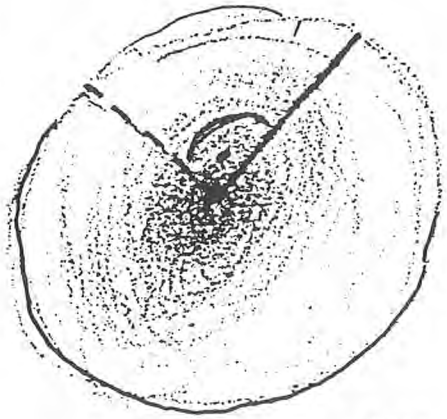


Abb. 1

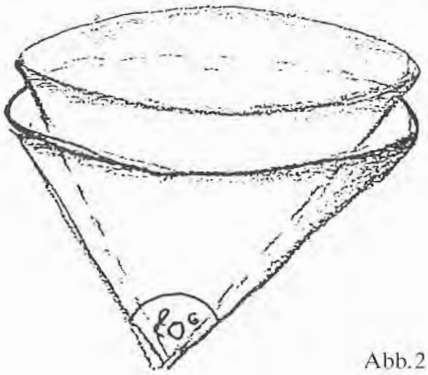


Abb. 2

1. Wir schneiden einen Kreis aus und unterteilen ihn in Sektoren (a = 10°)
2. Frage: Welches ist das grösstmögliche Volumen des Kegels?
3. Vermutung: Rechtwinklig des Einschnittes: 90° ist das Volumen des Kegels am grössten (Abb. 1).
4. Vorgang: Wir «konstruierten» zwei Kegel, einer mit 80° und einer mit 90°. (Abb. 2) Wir stellten sie ineinander und kamen zum Schluss: 90° ist spitzer, dafür ist der 80° grösser im Umfang, → 80° ist grösser als 90°.
5. Dasselbe machten wir mit 80° und 70°. Es ist ziemlich schwierig von Auge zu entscheiden. Doch uns scheint 70° Kegel noch grösser!
6. Anschliessend füllten wir einen 60° und einen 70° mit Wasser und massen das Wasser in einem Messbecher. Rein schätzungsmässig liegt das grösste Volumen zwischen 60 und 65 Grad.

4.1.2.2. Protokoll einer zweiten Gruppenarbeit:

1. Ausprobieren, auf verschiedene Extremgrade «einstellen» (z.B. 100°, 260°) → zwischen 70° und 130°.
2. Umfang berechnen: $18 \cdot \pi = 56.5$ cm
3. Wieviel ist 10°? Damit man die Grundfläche berechnen kann: 10° = 1.6 cm
4. Beispiel Grundfläche berechnen, wenn auf 90° eingestellt:
   56.5-(g·1.6)=42.1cm → $\frac{42}{2 \cdot \pi}$ r=6.7 cm
   Grundfläche $(6.7 \text{ cm})^2 \cdot \pi = 141 \text{ cm}^2$
5. Höhe berechnen (Kreisradius = Seitenlänge des Kegels = 9 cm) → $\sqrt{9^2 - 6^2} = 6$ cm = h
6. $\frac{G \cdot h}{3} = \frac{141 \cdot 6}{3} = 282 \text{ cm}^3$ bei 90°
7. Andere Grade gleich berechnen:
   - bei 80°: V = 287 cm³
   - bei 70°: V = 293 cm³
   - bei 60°: V= 291 cm³

Ich finde die Überlegungen und die dazugehörigen Vorgehensweise dieser zweiten Gruppe ausserordentlich geschickt und scharfsinnig!

4.1.2.3. Mathematische Berechnung

Die Berechnung ergibt für den Winkel, dessen Sektor aus dem Kreis ausgeschnitten werden muss: **a = 66,06°**
Hinweise dazu:

1. Bezeichnungen: Setze den Radius des gegebenen (Papier-)Kreises = 1; der gesuchte Winkel (Sektor, der aus dem gegebenen Kreis ausgeschnitten wird) heisse a: der Ergänzungswinkel b ist somit 360°-a; die Kegelhöhe bezeichnen wir mit h; den Radius des Kegels (des Cornets) mit r.

2. Somit ergibt sich für $r = \frac{\beta}{360°}$ und für
$$h = \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{129600}}$$

3. Eine Berechnung des Kegelvolumens könnte dann lauten:
$$V^2 = \frac{\pi^2}{9}\left(\frac{\beta^4}{360^4} - \frac{\beta^6}{360^6}\right)$$

4. Hieraus ergeben sich für ein maximales Kegelvolumen: $\beta = 293{,}94° \rightarrow \alpha = 66{,}06°$

4.2. Weitere Ideen für «Offene Situationen»

Um den Leserinnen und Lesern einige Anregungen zu geben, zähle ich hier fünf weitere «Offene Situationen» auf, die ich mit Klassen durchgeführt habe. In Klammern gebe ich mögliche engere und offenere Fragestellungen an:

- Fernseh- und Radioprogramme: Sendezeiten (Welcher Sender bietet mehr Sport, Krimis, Kindersendungen usw.); meine Freizeit und mein Fernsehkonsum; Grafiken über Sendekategorien (Information, Sport, Unterhaltung usw.)
- Strassenkreuzung: Grüne Wellen (für Radfahrer und/oder für Fussgänger); Grösse der Abwasserleitungen, damit sie einem starken Regenguss gewachsen sind; Verkehrszählungen.
- Versandhausprospekte: Was kostet ein Artikel tatsächlich (Nebenkosten: Telefonspesen für Bestellung, Preis für Porto und Verpackung, evtl. Umtauschkosten); Ratenzahlung (Zinszuschläge); Prospektaufmachung (wie viele Artikel pro Seite, wieviel Information pro Artikel, Schlagworte: wie viele, wie oft)
- Tageszeitungen: Anteil redaktioneller Teil (wieviel Werbung, resp. Inserate); Anteil Bilder; Vergleich zweier Zeitungen (wieviel Platz nimmt das gleiche Ereignis ein, Grösse der Überschriften); Buchstabengrössen (evtl. sogar: Anzahl Buchstaben pro Seite, pro Artikel)
- Paket mit Streichholzschachteln: Füllung einer Schachtel (zu wieviel Prozent ist sie gefüllt; ist Füllung zu 100% überhaupt möglich); Bedarf eines Haushaltes, eines Rauchers (pro Jahr, Holzverbrauch); Vergleich Feuerzeug–Streichhölzer (Anschaffungskosten; Sauerstoffverbrauch; Kaufgewohnheit erfahren durch Interview im Verkaufsladen); Parkettieren von Schachtelformen (welche Formen ermöglichen wenig Abfall)

4.3. Publikationen

Dozenten der Fachdidaktik Mathematik am Sekundarlehramt der Universität Bern stellen «mosima's» zusammen, die zum Teil auf Semesterarbeiten von Studierenden beruhen. Es ist geplant, diese Arbeiten nächstens in Buchform herauszugeben (Anfragen ans Sekundarlehramt der Universität Bern). Unter anderem sollen dabei folgende Sachverhalte angesprochen werden: Murmeltiere; Papierformate; Nutztiere: Hühner; Burgdorf–Thun; Grindelwald; Milch und Milchprodukte; Thunersee-Schiffahrt; Rund ums Brot; Rund ums Fahrrad; Schokolade.
Wer sich gründlicher über die gesamte Problematik informieren möchte, greife zur Dissertation von Armin Hollenstein: Schreibanlässe im Mathematikunterricht (September 1996 im Paul Haupt Verlag erschienen).

Fred Eggenberg, 1953–56 Primarlehrer in Ittigen, 1958–81 Sekundarlehrer in Biglen, 1981–96 Seminarlehrer in Thun, 1978–96 Dozent für Didaktik der Mathematik am Sekundarlehramt der Uni Bern. Seit August 96 pensioniert.

Foto K. Brönnimann, nach einer Lithographie aus dem Jahr 1841 von P. Kormann, Paris.

Warum ein Geometer ausgerechnet einen Preis für gute Leistungen im Kopfrechnen stiftet?

Es mag als Kuriosum erscheinen, dass ausgerechnet der Geometer Jakob Steiner, ein Mathematiker, der kaum andere Gebiete der Mathematik mit neuen Erkenntnissen bereichert hat, für die Schulen der Heimatgemeinde Utzenstorf einen Preis für die besten Kopf- oder Schnellrechner gestiftet hat. Darum einige Hintergründe, die es mir erlauben, diesen Entscheid zu verstehen.

Schon als Junge ist Jakob Steiner mit seinem Vater, später allein, auf den Markt nach Solothurn gegangen. Hier musste er mit Gewichtsmassen und Geld umgehen können. Es wird auch gesagt, der junge Steiner habe anderen Bauern bei ihren Geldangelegenheiten geholfen. Da war er also auf das Kopfrechnen angewiesen, umso mehr, als er erst mit 14 Jahren schreiben lernen durfte (zuerst musste der Katechismus auswendig gelernt werden!).Der wissensdurstige Jakob Steiner gelangte 1814 (mit 18 Jahren) zu Pestalozzi nach Yverdon, wo er von offensichtlich sehr geschickten Mathematiklehrern (Maurer und Leuzinger) nach der Methode von Pestalozzi in Geometrie unterrichtet wurde. Es scheint, dass sich Steiner der Qualität dieses Unterrichts bewusst war. Jedenfalls hat er als 60jähriger Mann, als er spürte, dass er vielleicht nie mehr nach Berlin zurückkehren würde, diese Schulhefte mit nach Hause genommen. So sind die Kollegienhefte aus seiner Schulzeit bei Pestalozzi erhalten. In der Burgerbibliothek Bern (unter der Bezeichnung Mss. h. h. 350 bis 360) werden diese Hefte aufbewahrt. Es lohnt sich aus verschiedenen Gründen, diese Materialien einmal anzusehen: es wird nicht nur die pestalozzianische Methode im Mathematikunterricht klar ersichtlich (für die heutige Didaktik interessant), sondern auch die Arbeitsweise Steiners (selbständiger Lerner).

Der Unterricht beginnt bei Maurer in Geometrie mit verschiedenen Betrachtungen über das Dreieck. Es werden Winkel und Seiten geteilt, die Teilpunkte der Seiten unter sich und mit den Ecken verbunden. Dadurch entstehen Schnittpunkte von Transversalen. Jetzt werden Abschnitte und Teilwinkel miteinander verglichen. Dann werden analog das Quadrat untersucht, dann allgemeinere Vierecke u.s.w. Damit entsteht eine Fülle von Aufgaben, in denen es um Verhältnisse geht (von Streckenlängen, von Flächeninhalten, von Winkelgrössen), die stets als Brüche interpretiert werden. Damit verbindet sich mit der Geometrie eine anschauliche Lehre zum Rechnen mit gemeinen Brüchen. Flächeninhalte werden als Zahlen interpretiert, mit denen gerechnet wird – und zwar, wenn immer möglich – im Kopf. Auch bei der Fortsetzung (Satzgruppe des Pythagoras, Ähnlichkeit) wird dem Kopfrechnen (insbesondere mit gemeinen Brüchen) viel Gewicht beigemessen. Immer mehr kommt jetzt aber das Bedürfnis Steiners dazu, die Resultate zu beweisen, die Ergebnisse zu verallgemeinern oder analoge Sätze für andere Figuren zu finden.

Verstehen wir jetzt, warum Steiner seinen Preis für die besten Kopfrechner bestimmte?

Aus einem Brief, datiert 7. – 12. V. 1855

Gestrenger Signore!

Ihr ungnädiges Gripp-Schreiben nimmt mir fast den Muth neue Fragen zu stellen. Sie haben keinen Massstab für die Verstandes- und Gedächtnissschwäche Anderer, urtheilen bloss nach sich, daher keine Nachsicht. Bei meiner Erschlaffung kann ich nicht immer mit hohen Sätzen rumpeln; zudem besteht meine Grösse nur im Kleinen, im sorgfältigen allseitigen Erforschen desselben; und wahrlich ich sage Euch, «wer nur Grosses fressen will, sieht das Gras nicht wachsen», kann die Welt nicht unmittelbar belehren. Die meisten Menschen steigen vom Kleinen aufwärts; es giebt wenige Bevorzugte, die Alles auf einmal und von Oben herab verschlingen, es sind Elephanten, mehr als der alte Mezzo-Elefanti in Rom war.

Ob Sie mir alle Fragen beantwortet haben, weiss ich nicht. Von Ihren Katarrh-Formeln kann ich keinen Gebrauch machen, wie schon früher bemerkt worden, glücklicherweise hatte ich mich schon zuvor erinnert, wie sich die Sache verhält. – Einiges scheinen Sie zu flüchtig angesehen zu haben, wie ich zeigen werde. Halten Sie zu Gnaden, wenn ich dabei vielleicht Dinge vorbringe, die schon in Früherem enthalten; in meinen Manuscripten kommt manches 3 bis 7 Mal vor. Uebrigens macht mich dies Kapitel über die nothwendigen Puncte und Curven bei Flächen halb verrückt, ich drehe und wende mich fortwährend noch darin, ohne zu Ende zu kommen.....

(nach: «Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli», Separat-Abdruck aus den Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern, 1896, S. 182 ff.)

Kommentar:
«Signore» nennt Steiner freundschaftlich seinen um 18 Jahre jüngeren Bernerkollegen und Freund Ludwig Schläfli.

BIOGRAPHISCHES

Jakob Steiner – Bausteine zu einem Lebensbild

Ulrich Schweizer betrachtet hier die Person Jakob Steiners anhand eines vielfältigen Quellenmaterials aus der Burgerbibliothek und der Literatur, die aus ganz verschiedenen Blickwinkeln, in verschiedenen Zeitepochen mit ihrer jeweiligen Optik, und von ganz verschiedenen Autoren mit ihrem spezifischen Umfeld Bilder von dem Mathematiker zeichnen, so dass die Leserschaft ein umfassendes Bild über diesen Menschen erhält.

1. Ein Blick ins Lexikon bringt Klarheit ! – bringt er Klarheit?

Meyers Lexikon, Bd. 11 (1929):

Steiner, Jakob, Mathematiker, *18. März 1796 Utzenstorf bei Solothurn, † 1. April 1863 Bern, lernte erst mit 14 Jahren schreiben, ging 1813 nach Jferten zu Pestalozzi, studierte seit 1818 in Heidelberg, wurde 1821 in Berlin Privatlehrer der Mathematik, dann Lehrer an der Gewerbeakademie, seit 1834 Professor an der Universität und Mitglied der Akademie der Wissenschaften, lebte zuletzt in der Schweiz. Seine Vorstellungskraft war ausserordentlich, seine geometrische Richtung lange Zeit herrschend. Seine «Gesammelten Werke» gab im Auftrag der Berliner Akademie Weierstrass heraus (1881/82. 2 Bde.) S. hat bei der Berliner Akademie einen S.-Preis für Mathematik gestiftet. Lit. J. H. Graf, Der Mathematiker J. S. (1898); J. Lange, J. S.s Lebensjahre in Berlin (1899).

Brockhaus Enzyklopädie Bd. 18, 1973:

Steiner, Jakob, schweizer. Mathematiker, * Utzenstorf (Kt. Bern) 18. 3. 1796, † Bern 1. 4. 1863, lehrte 1821 bis 1835 in Berlin. S. ist einer der Begründer der synthet. Geometrie. Steinersche Sätze sind in Mechanik und Statistik vielgebrauchte Sätze über Trägheitsmomente. In Rom entdeckte S. bestimmte Flächen (Römerflächen) vierter Ordnung, auf denen Scharen von Kegelschnitten liegen. C. F. GEISER: Zur Erinnerung an J.S. (1874); J.H. Graf: Der Mathematiker J.S. (1879); L. Kollros: J.S. (1947).

Brockhaus Enzyklopädie Bd. 21, 1993:

Steiner, Jakob, schweizer. Mathematiker, * Utzenstorf (Kt. Bern) 18. 3. 1796, † Bern 1. 4. 1863; Sohn eines Bergbauern, der erst mit 14 Jahren schreiben lernte. S. kam 1814 in die Schule von J. H. PESTALOZZI, an der er ab 1816 unterrichtete. 1818–1821 hielt sich S. in Heidelberg auf, wo er weitgehend autodidakt. Studien trieb, danach in Berlin, wo er 1834 auf Betreiben u.a. A. von HUMBOLDTS Prof. wurde. S. formulierte als erster den nach ihm benannten Lehrsatz der Mechanik. Er gilt als einer der wichtigsten Vertreter der synthet., insbesondere der projektiven Geometrie im 19. Jh., wobei er nicht zuletzt durch ungewöhnl. Verhalten, später auch durch unaufrichtiges Zitieren, ein Aussenseiter der wiss. Welt blieb. Ausgabe: Ges. Werke, 2 Bde. (1881–82, Nachdr. 1973), L. Kollros: J.S. (Basel, 1979).

Kommentar:
Es ist erstaunlich, wie einzelne Informationen in ein Lexikon geraten. Exemplarisch kann gezeigt werden, wie kritisch sogar so vertrauenerweckende Werke wie Lexika zu lesen sind. Auch die Gewichtung der einzelnen Angaben ist interessant: Ist es der zeitliche Abstand zu der beschriebenen Person oder der jeweils herrschende Zeitgeist, der in den Artikeln zum Ausdruck kommt?
Die Auswahl der Artikel geschah mehr oder weniger zufällig

Lexikon bedeutender Mathematiker (Hrsg. S. Gottwald, H.-J. Ilgauds, K.-H. Schlote; Verlag Harri Deutsch, 1990, S. 438/439):

Steiner, Jakob: geb. 18. 3. 1796 Utzenstorf (Kanton Bern), gest. 1. 4. 1863 Bern. S., Sohn eines Kleinbauern und Kleinhändlers, lernte erst im Alter von 14 Jahren das Schreiben, denn er musste in der Wirtschaft seiner Eltern helfen. 1814 verliess S. seinen Heimatort und wurde Schüler an der von J.H. PESTALOZZI (1746 – 1827) geleiteten Erziehungsanstalt in Yverdon. Der berühmte Pädagoge erkannte S.s Begabung und ermöglichte ihm schon 1816, selbst zu unterrichten. 1818 – 1821 studierte S. in Heidelberg, wobei er sich nebenbei durch Unterrichtstätigkeit seinen Lebensunterhalt verdienen musste. Ab 1821 lebte er in Berlin, war erst Aushilfslehrer an einem Gymnasium, dann Privatlehrer und Hilfslehrer. Nach einem Zusatzstudium in Berlin legte er 1821 eine erste Staatsexamensprüfung, dann 1826 eine zweite ab, die ihm die Lehrbefähigung für alle Klassen verschaffte. Ab 1829 war S. Oberlehrer an der Berliner Gewerbeschule, erhielt 1832 aufgrund seiner wissenschaftlichen Leistungen die Ehrendoktorwürde der Univ. Königsberg (Kaliningrad), 1833 den Prof.-Titel und wurde 1834 o. Mitglied der Berliner Akademie und a.O. Prof. an der Berliner Univ. S. beschränkte sich in seinen Arbeiten fast ausschliesslich auf Probleme der synthetischen Geometrie. Nachdem er sich erst der Behandlung sehr spezieller geometrischer Probleme zugewandt hatte, erschien 1832 seine berühmte Arbeit «Systematische Entwicklung der Abhän-

gigkeit geometrischer Gestalten voneinander», in der S. die Grundlagen der projektiven Geometrie entwikkelte. 1833 folgten «Die geometrischen Constructionen ausgeführt mittels der geraden Linie und Eines festen Kreises», die die Entwicklung des Problemkreises der Konstruktionen mit beschränkten Konstruktionsmitteln wesentlich beeinflusste. S. veröffentlichte Arbeiten *Über das isoperimetrische Problem* (1836), über konvexe Körper, *Über Krümmungsschwerpunkte* (1838), *Über parallele Flächen* (1840, 1846), zur Theorie der Kurven 3. und 4. Grades und über *«allgemeine Eigenschaften» algebraischer Kurven* (Polarkurven, Steiner-Kurven u.a., 1848). In wenigen Ausnahmefällen untersuchte S. auch Fragen der Kombinatorik (1852) und der Zahlentheorie (1852). Die Arbeiten S.s aus den letzten Jahren enthalten oft unbewiesene Behauptungen, die viele Anregungen für andere Geometer gegeben haben.

Kommentar:
Dieser Artikel scheint mir ausgewogen und brauchbar als Information zur Biografie Jakob Steiners.

Und was findet sich im INTERNET (WWW)? Wer die Möglichkeit hat, suche einmal unter dem Stichwort «Steiner Jakob». Man wird tatsächlich fündig!

2. Was steht in Mathematikbüchern zur Person Jakob Steiners?

H. Kaiser, Geschichte der Mathematik.
W. Nöbauer, hpt-Verlag, Wien 1984
S. 61/62

«Jakob Steiner, ein von dem berühmten Pädagogen Pestalozzi als Hirtenknabe auf einer Schweizer Alpe entdecktes und von ihm ausgebildetes Naturtalent, war Professor an der Berliner Universität. Er war durch und durch Synthetiker, und die Verwendung von Algebra und Analysis in der Geometrie war ihm verhasst; sogar Zeichnungen lehnte er als Beweishilfsmittel ab. Steiner entdeckte eine grosse Zahl wichtiger geometrischer Sätze. Z.B. studierte er die Inversion am Kreis und ihre Eigenschaften und bewies, dass eine Fläche dritter Ordnung genau 27 Geraden enthält.»

G. Kropp, Geschichte der Mathematik.
Sammlung Aula, Wiesbaden 1994
S. 179/180

«Jakob Steiner (1796...1863). Ein Schweizer Naturtalent, das auch bei Pestalozzi tätig war, kam im Jahre 1821 nach Berlin, wo er seit 1834 an der 1810 gegründeten Universität lehrte.»

Kommentar:
Die ersten beiden Artikel setzen die «romantische» Vorstellung, wie sie auch im Lexikon auftaucht, fort. Dazu möchte ich auch auf die Porträts Jakob Steiners hinweisen. Was wird dargestellt? Ein romantischer Jüngling, ein bärtiger Schweizer Alphirte?

Foto der Reproduktion der Zeichnung von Niklaus Senn (1798–1867), in: J.H. Graf, Beiträge zur Biographie Jakob Steiners, in: Mitt. d. Naturf. Ges. Bern, 1905.
Photo aus Burgerbibliothek Bern

Felix Klein: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert., 1926/27. Nachdruck: Wiss. Buchges. Darmstadt, 1979, S. 126 – 129:

«Jakob Steiner, der Schweizer Bauernsohn, der bis zum 19. Jahr den Acker pflügte und sich dann, von seiner grossen Sehnsucht nach dem Lehrerberuf getrieben, der Pestalozzischen Ausbildung widmete, ist, soviel ich weiss, das einzige Beispiel in unserer Wissenschaft für eine Heranbildung mathematischer Fähigkeiten erst im reifen Mannesalter, die trotzdem noch bis zur Meisterschaft führt; einzigartig dürfte er auch dastehen als ein führender Geist und bedeutender Universitätslehrer, der aus der methodischen Zucht des Volksschulbetriebes hervorgegangen ist. Steiner wurde am 18. März 1796 in Utzendorf (!) bei Solothurn geboren. Als

Bauer aufgewachsen, trat er 1815 zunächst zur eigenen Weiterbildung, später als Lehrer in das pädagogische Institut ein, das Pestalozzi zu Iferten gegründet hatte, um seine reformatorischen Ideen auf dem Gebiet der Erziehungskunst in die Praxis umzusetzen. So schöpferisch und belebend auch Pestalozzis Ideen waren, wie ja ihre Nachwirkung nach vielen Seiten beweist, so fehlte es ihm offenbar selbst doch an Geschick, ihnen durch die Tat zum Durchbruch zu verhelfen. Sein Unternehmen in Iferten scheiterte, vor allem an finanziellen Schwierigkeiten. Steiner, den es mächtig nach wissenschaftlicher Weiterbildung verlangte, verliess ihn 1818, um bis 1821 in Heidelberg, kümmerlich durch Privatstunden seinen Unterhalt verdienend, sich vor allem durch eigene Studien der französischen Geometrie weiter zu entwickeln. Dennoch verhalf ihm seine frühere Lehrertätigkeit zuerst vorwärts. In Berliner ministerialen Kreisen war nämlich ein Interesse an der Pestalozzischen Methode lebendig, und so wurde Steiner nach Berlin gezogen, wo er zunächst verschiedene Lehrerstellungen inne hatte. Der Zutritt zum Hause Wilhelm von Humboldts, des früheren Ministers, dessen Sohn er unterrichtete, verhalf ihm zum Anstieg. 1834 wurde, als letzter Ausläufer der Bestrebungen nach Gründung einer polytechnischen Schule, ein Extraordinariat an der Berliner Universität für ihn errichtet; zugleich wurde er Mitglied der Akademie. Er starb am 1. April 1863. Es mag auffallen, dass Steiner ein Ordinariat in Berlin versagt geblieben ist. Offenbar hielt man dafür, dass es ihm für eine solche Stellung an der gesellschaftlichen Befähigung mangele. Und in der Tat würde Steiner sich in die offiziellen Kreise auf eine seltsame Weise eingefügt haben, zumal in späteren Jahren, als der alternde Mann, mit Gott und der Welt zerfallen, seinen Argumenten im Gespräch häufig durch eine nicht leicht zu übertreffende, urwüchsige Grobheit Nachdruck zu verleihen pflegte. Über seine Persönlichkeit und seine Entwicklung finden sich viele interessante Notizen in der Schrift seines Neffen C. F. Geiser. *(Es müsste richtig heissen: Grossneffe)* Nach allem, was Geiser über Steiners Entwicklung erzählt, und nach der Art, wie sich Steiners Gaben äusserten, müssen wir sein Talent, das von der anschauungsmässigen Erfassung der Raumformen ausgeht, und eben darum die Analysis verschmäht, als ein durchaus ursprüngliches ansehen. Die Rückführung seiner Anschauungskraft auf Pestalozzischen Einfluss muss jedem als unhaltbar erscheinen, der einmal das in diesem Zusammenhang oft genannte Pestalozzische Buch «ABC der Anschauung» in der Hand gehabt hat. Das Buch ist von einer inhaltlichen Armut, die einen wahrlich erschrecken und in dem Verfasser den Begründer der auf Anschauung gerichteten neuen Pädagogik nicht ahnen lässt. Einzig und allein die Zerlegung von Strecken in gleiche Teile, von Quadraten in gleiche Quadrate, wird in immer neuer ansteigender Anzahl bis zum Überdruss geübt. Welch sonderbare Vorstellungen diese ersten Pädagogen, die doch wirklich eine neue, äusserst fruchtbare Idee lebendig gemacht haben, von der Ausführung ihrer Pläne hatten, geht auch aus dem Kommentar hervor, den der grosse Philosoph und Pädagoge HERBART zu dem Pestalozzischen Werk verfasste. Herbart entwirft für die Pflege der Anschauung eine Tafel mit lauter rechtwinkligen Dreiecken verschiedener Gestalt und Grösse, durch deren ständigen Anblick er eine lebhafte Vorstellung der rechtwinkligen Dreiecksgestalt in seinen Zöglingen erwecken wollte; ja, zur dauernden, unvergesslichen Einprägung empfiehlt er, diese Tafel bereits neben der Wiege des Säuglings aufzuhängen! Um den richtigen Kern aus diesen pädagogischen Monstrositäten herauszuschälen und die Erziehungskunst in vernünftigere Bahnen zu lenken, bedurfte es erst eines FRÖBEL. Er und mit ihm HARNISCH, stellte die körperliche Gestalt, also das Dreidimensionale, bei der Erziehung des Kindes voran. Bei beiden Pädagogen macht sich der eigene Bildungsgang, nämlich das Ausgehen von Mineralogie und Kristallographie, geltend. Seine anschauliche Kraft hat also Steiner gewiss nicht aus dieser Quelle geschöpft; aber etwas anderes verdankte er für sein Leben der eigenartigen Ausbildung: die Kunst des Unterrichtens. Die Pestalozzische Richtung pflegte das liebevolle, sorgfältige Eingehen auf den Standpunkt des Lernenden, zu dessen Förderung sie die sog. Sokratische Methode anwandte. Alle Erkenntnis soll von dem Schüler selbst erarbeitet, entdeckt, produziert werden; nur eine Anleitung für die einzuschlagende Richtung soll der Lehrer dem selbstdenkenden Schüler geben. Steiner verwendete aus diesem Prinzip, das er mit grossem Geschick und Erfolg ausbaute, in seinen Vorlesungen keine Figuren; das lebendige Mitdenken des Hörers sollte ein so deutliches Bild in seiner Vorstellung erzeugen, dass er das sinnlich Angeschaute entbehren könnte. (...)

Steiners Arbeiten sind als gesammelte Werke in zwei Bänden von der Berliner Akademie herausgegeben (1880/82). Sie zerfallen in zwei recht scharf getrennte Gruppen. Die erste umfasst die Periode von 1826 (Crelle, Bd. 1) bis etwa 1845. Sie enthält die eigentlich originalen Konzeptionen Steiners, freilich an relativ elementaren Gebilden durchgeführt. Die zweite Periode enthält Arbeiten über höhere algebraische Gebiete, oft nur Ankündigungen von Resultaten ohne Beweis. Leider geht aus dem von Graf 1896 herausgegebenen Briefwechsel Steiners mit SCHLÄFLI aus den Jahren 1848 bis 1856 mit Deutlichkeit hervor, dass Steiner sich hier in ausgiebiger Weise englischer (und anderer) Quellen bedient hat, die er nicht zu kennen vorgab. Es ist die Tragik dieses an sich gewiss ungewöhnlichen Mannes, dass er nach einem selten ruhmvollen Aufstieg, von seiner Umgebung mit Verehrung und Bewunderung überschüttet, das Schicksal der im Alter versiegenden Produktivität nicht ertrug und, verbittert, wie er war, sich mit verzweifelten Mitteln dagegen wehrte, indem er vor sich selbst und anderen den Glanz früherer Tage zu erhalten suchte. Wieweit hier wirkliche Täuschung vorliegt, wieweit Steiner selbst das Opfer einer durch lebhaften Wunsch getrübten Beurteilung der eigenen Erfindungskraft war, wer will das entscheiden?»

Kommentar:
Es mag interessant sein, wie Felix Klein, der für die Mathematik und den Mathematikunterricht sehr Bedeutendes geleistet hat, die Methode Pestalozzis und das Werk Steiners beurteilt (aus dem Blickwinkel «Zwischenkriegszeit»). Beim erwähnten Schläfli handelt es sich um den ebenfalls berühmten Berner Mathematiker Ludwig Schläfli (1814–1895). Der Briefwechsel Steiner – Schläfli wurde von J.H. Graf veröffentlicht (Bern, K.J. Wyss, 1896).

3. Erinnerungen an Jakob Steiner

C. F. Geiser: Zur Erinnerung an Jakob Steiner. Schaffhausen 1874, S. 3 ff.

Kirche von Utzenstorf, Zeichnung von Jakob Steiner, Burgerbibliothek Bern

«Jakob Steiner ist am 18. März 1796 geboren, an einem Tage, der in späteren Jahren, wenn eine ingrimmige Stimmung sich seiner bemächtigte, ihm Gelegenheit bot, mit dem Schicksal zu hadern, das ihm nicht einmal erlaubte, in Berlin seinen Geburtstag zu feiern, ohne dem nachmärzlichen Regimente als staatsgefährlicher Demokrat zu erscheinen. In seinem Heimathsorte Utzenstorf, ungefähr in der Mitte zwischen Burgdorf und Solothurn gelegen, brachte er den grössten Theil seiner Jugend zu, nicht etwa als idyllischer Gessner'scher Hirtenknabe, sondern sobald dies nur angieng, im Verein mit seinen Geschwistern als rühriger und fleissiger Mitarbeiter in dem kleinen landwirthschaftlichen Betriebe seiner Eltern. Ausser den einfachsten Schuldisciplinen, die hauptsächlich im Memoriren des Heidelberger-Katechismus und des Gesangbuches bestanden, fand er keine geistige Anregung in dem Bauerndorfe. (...) Noch in seinem Alter beklagte er sich, dass er erst mit vierzehn Jahren das Schreiben erlernt habe, weil der Dorfpapst mit jedem andern Unterrichte zurückhielt, bis die Schüler das Fragebuch vorwärts und rückwärts auswendig konnten. (...) Wollen wir uns seinen Lebensgang bis zum siebzehnten Jahre lebendig vor Augen führen, so müssen wir uns an die Schriften seines Jugendfreundes Bitzius halten, der als Jeremias Gotthelf die Sitten und Zustände des Bernerlandes wie sie so lange Zeit fast unverändert fortbestanden haben, mit unerreichbarer Meisterschaft schildert. Der fortwährende Aufenthalt in der freien Luft des Feldes und des Waldes stärkte seinen Leib und schärfte seine Sinne. Mit Stolz hob er oftmals hervor, wie er auf den Weiden des entfernten, in blauem Schimmer erglänzenden Jura die Kühe sich habe bewegen sehen und nicht ohne ironische Befriedigung fügte er hinzu, dass ihm auch im spätern Alter das Rindvieh selbst auf grössere Distanzen erkennbar gewesen sei. (...) Pestalozzi legte einen grossen Werth darauf, den Unterricht mit der Übersetzung geometrischer Anschauungen in Zahlen beginnen zu lassen und bei dieser Gelegenheit regte sich zum erstenmale die schöpferische Phantasie des wissbegierigen Schülers. Er empfand rasch, dass er seinen Lehrern weit überlegen sei und wandte mit Erfolg das Grundprincip des Meisters, die Schüler zur Selbstthätigkeit anzuregen auf die damaligen Lehrgehülfen an, indem er sie zum Studiren zwang, damit sie das verstünden, was er, der Neuling in seinem Geiste anschaute. Schon damals gieng er immer auf allgemeine Gesichtspunkte aus, wie seine erste geometrische Entdeckung zeigte, die, so unbedeutend und klein sie erscheinen mag, hier eine Stelle verdient. Sein Lehrer hatte ihm gesagt, dass durch drei Ebenen ein körperliches Dreieck gebildet werde, worauf Steiner, dessen Kleider noch nach dem väterlichen Kuhstall rochen, sofort einwarf: es giebt ja deren achte. Für sein ganzes späteres Wirken ist die Art und Weise, wie er die Elemente der Wissenschaft sich erworben hatte, entscheidend geworden. Auch dem bescheidensten Erfolge, wenn er aus eigener Kraft und selbständigem Nachdenken hervorgegangen war, wurde seine Anerkennung zu Theil, während er noch so umfangreichen Kenntnissen, wenn sie nicht innerlich verarbeitet und originell wiedergegeben waren, nur misstrauisch und geringschätzend gegenüber trat. Ja selbst das Institut in Iferten that seinem Drange nach eigener Verarbeitung alles Wissens und Könnens nicht Genüge, er beklagte sich einst, dass er vor seinem Eintritte in dasselbe ganz ordentlich habe zeichnen können – nachdem er aber im Zeichnen unterrichtet worden sei, wäre es ihm nicht mehr möglich gewesen, die Kirche des heimathlichen Dorfes stattlich und deutlich wie früher auf das Papier zu bringen.»

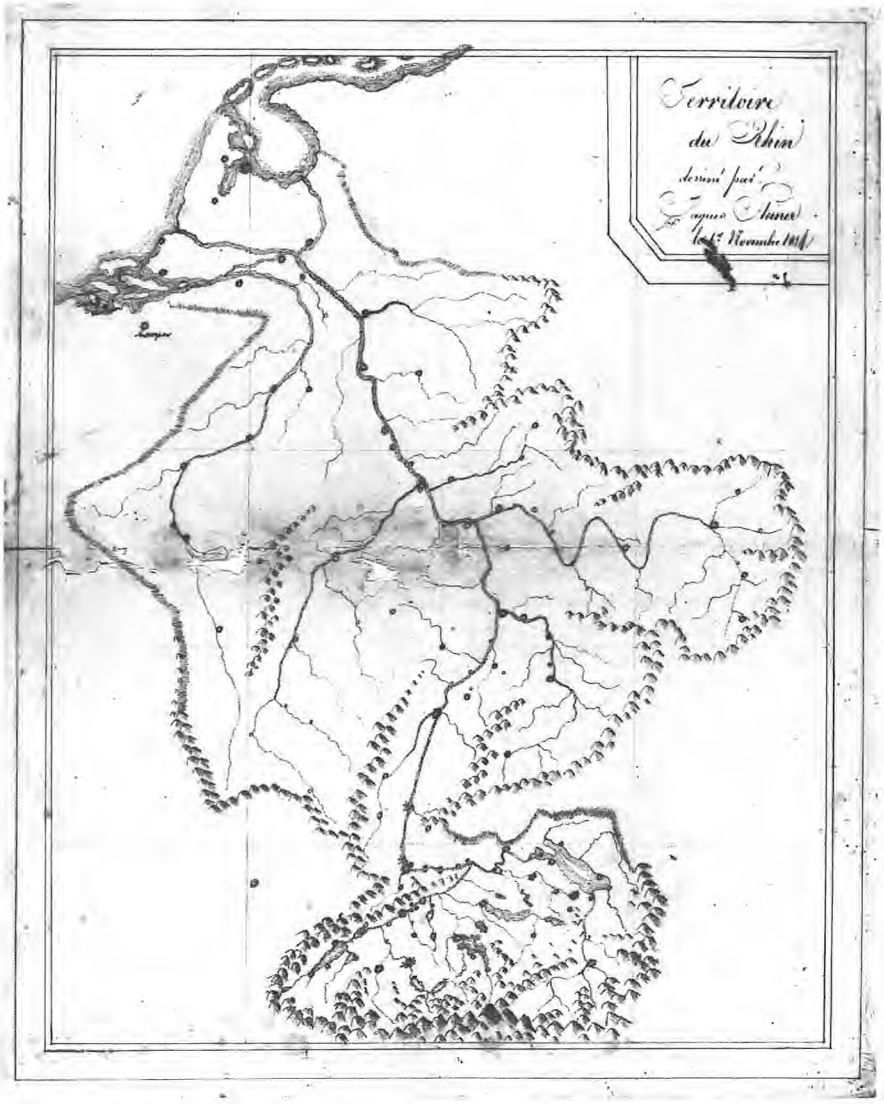
Kommentar:
Die Schwester Jakob Steiners, Anna Barbara (1786–1870) verheiratete sich mit David Begert. Ihr drittes Kind Elisabeth (1815–1892) vermählte sich mit Friedrich Geiser (1810–1857, Metzger und Wirt in Langenthal), deren Sohn Carl Friedrich (1843–1934) später Professor für Mathematik an der ETH in Zürich wurde. Er hat seinen Grossonkel noch persönlich gekannt, einige Zeit bei ihm in Berlin verbracht und 1866 als erster Doktorand von L. Schläfli in Bern promoviert.

F. Bützberger: Biographie Jakob Steiners. Manuskript Nr. 348, Burgerbibliothek Bern, S. 4/5, (vgl. Anmerkung 12).

Der Grossneffe Steiners, C.F. Geiser, erinnert sich:

«Eine angenehme Erholung brachten dem jungen Steiner die herbstlichen Tage des Viehhütens, an die er sich noch als alter Mann mit grossem Vergnügen erinnerte. Da genoss er ausnahmsweise eine gewisse Freiheit, konnte sich seinen Neigungen besser widmen und auch mit seinen Kamera-

den allerlei Streiche verüben, zu denen er, wie Albert Bitzius, ganz hervorragend befähigt war. Einer dieser Streiche erinnert lebhaft an die ergreifende Kinderszene in Gottfried Kellers ‹Romeo und Julia auf dem Dorfe›, wo eine lebendige Fliege in einem Puppenkopf beerdigt wird. Steiner hat mit einem Schulkameraden, mit dem er bis zum Tode in herzlichster Freundschaft verkehrte, Rüben ausgehöhlt, lebendige Mäuse hineingetan, um sie darin fest verschlossen bachab der Emme zufliessen zu lassen im Glauben, dass sie bis ins Meer schwimmen – gleichsam ein Sinnbild seiner späteren geometrischen ‹Progresse›, die er sich so oft mit Entzücken und Begeisterung bis ins ‹Meer der Unendlichkeit› fortgesetzt dachte.»



Das Flussgebiet des Rheins, Zeichnung von Jakob Steiner

4. Wie sahen Zeitgenossen Jakob Steiner?

Der deutsche Dichter Theodor Fontane

Auf eine Anfrage von Prof. Lange schreibt Theodor Fontane (ehemaliger Schüler Steiners in der Tertia der Gewerbeschule Berlin) in einem Brief vom 31. Januar 1898:
«Ob ich mich Steiners erinnere? Er steht in aller Deutlichkeit vor mir, als hätt ich ihn gestern gesehen, auf und abschreitend auf dem schmalen Raum zwischen Katheder und erster Bank (die nicht meine Bank war) und dabei Rechenaufgaben diktierend.
Er konnte – was wohl schweizerisch ist – mit dem Buchstaben «j» nicht recht fertig werden und sprach beispielsweise das Wort «jeder», das in seinen Diktaten immer wiederkehrte, dreisilbig aus. Also: «i-eder Sackträger trug drei Sack, und i-eder Sack wog 100 Pfund».
Steiner war kräftig und gedrungen und aus dem ein wenig fuchsartigen Kopfe leuchteten ein Paar kleine listig freundliche Augen, freundlich, aber doch zugleich so, dass man deutlich fühlte: «mit dem ist unter Umständen schlecht Kirschen pflücken». Es war der Ausdruck von Güte, Leidenschaft und Energie. Was sich mir aber am tiefsten eingeprägt hat, ist das, dass sich in seinem ganzen Wesen eine gewisse Resignation aussprach, eine leichte Schwermut darüber, sich mit einem an ihm gemessen, so minderwertigen Material abquälen zu müssen. Vielleicht waren einige von Talent unter uns, aber was wollte das sagen! Aufs Ganze hin angesehen stand ein Archimedes vor Abc-Schützen.

Und das erwogen, ist, glaub' ich ihm nachzurühmen, dass er sich mit andern Lehrern in ähnlicher Lage (so beispielsweise mit Philipp Wackernagel) verglichen, einer gewissen Liebenswürdigkeit befleissigte. Wackernagel war immer ärgerlich und gereizt über die ihm auferlegte Langeweile, die er übrigens mit gleicher Münze zurückbezahlte, während Steiner nur traurig war. Sein Schweizerhumor lieh ihm dabei gleichzeitig die Fähigkeit, aus seiner Lage noch ein gewisses Vergnüglichkeitskapital herauszuschlagen.

Und das führt mich schliesslich auf meine persönlichen Beziehungen zu Steiner. Ich eroberte mir von einem bestimmten Zeitpunkt ab sein Interesse. Meine grandiose Nicht-Beanlagung für alles, was mit Zahlen zusammenhängt, das gänzliche Fehlen jedes Organs für das, was er vortrug, machte zuletzt einen rührenden und doch auch wieder erheiternden Eindruck auf ihn, und wenn er mich dann, amüsiert über meine blöden Antworten, schelmisch anblinzelte, so lag darin jedesmal ein bestimmtes Mass von Anerkennung, etwa wie wenn er sagen wollte: ‹Das lass ich mir gefallen, den lob ich mir, der ist in seiner Art vollendet.› »

nach F. Bützberger Manuskript Nr. 348 (Burgerbibliothek Bern), S. 61 ff.
aus «Jakob Steiners Lebensjahre in Berlin 1821–1863, nach seinen Personalakten dargestellt» von Prof. Julius Lange. Sonderdruck der Festschrift zur Erinnerung an das 75-jährige Bestehen der Friedrich-Werderschen Oberrealschule (ehemals Gewerbeschule), Berlin 1899.

Aus Briefen während der Romreise

1843/44 unternehmen Johann Peter Gustav Dirichlet (mit seiner Frau, der Schwester von Fanny Hensel-Mendelssohn und Felix Mendelssohn), Carl Gustav Jacobi, Ludwig Schläfli, Jakob Steiner und Borchardt (fünf Mathematiker) zusammen eine Reise nach Italien: Florenz, Rom, Neapel stehen auf dem Programm.

Am 21. 10. 1843 schreibt Frau Rebekka Dirichlet ihrer Schwester Fanny Hensel-Mendelssohn:

«Gestern ist auch Steiner eingerückt, was eben nicht für mich zur Verschönerung der Reise wesentlich beitragen wird. Er hat noch einen Schweizerjüngling mitgebracht, der ein mathematisches Genie sein soll, sicherlich aber ein Rindvieh ist. Was kann man aber auch erwarten, wenn einer Herr Schläfli heisst?»

nach F. Bützberger, Manuskript Nr. 348, S. 152 (Anmerkung 79)
aus «Die Familie Mendelsohn 1729–1847» von Sebastian Hensel, Berlin, Verlag Behr, 1879, Bd. 3.

Brief von Jacobi aus Florenz an seine Frau, vom 21. November. 1843:

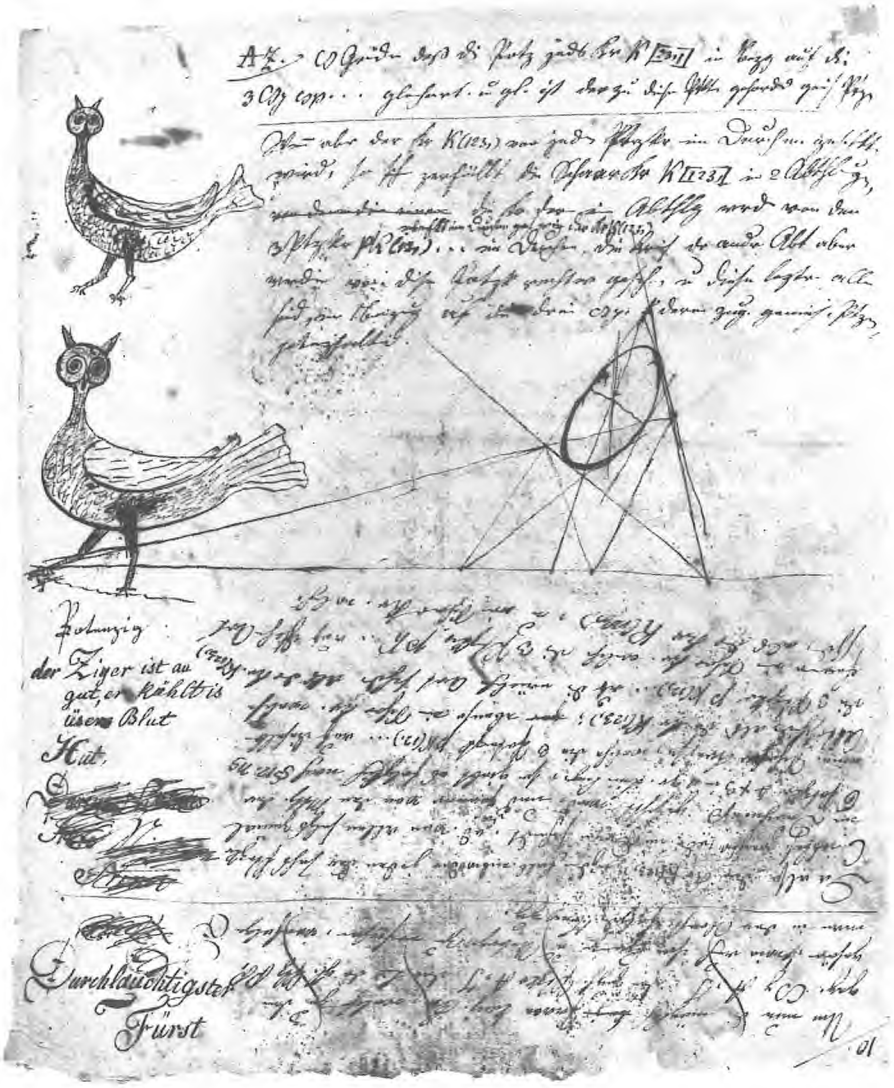
«Dirichlets sind schon vergangenen Mittwoch vor 8 Tagen abgereist; dafür ist aber seit 14 Tagen Steiner angekommen, der mir von grösstem Nutzen ist, indem er täglich mit mir ungeheure Spaziergänge auf die umliegenden reizenden Höhen macht (...).»

Brief von Jacobi aus Rom an seine Frau, vom 14. Dezember. 1843:

«Seit Dirichlets Abreise von Florenz machte ich alle Besichtigungen mit Steiner zusammen, was manches Interessante hat. Zunächst das mir liebste, dass er nicht wie die andern zuerst immer in das Buch sieht, ob etwas schön ist, sondern sich die Sachen selber ansieht, wobei ihn sein scharfes Auge und eine lebendige sinnliche Anschauungskraft sehr unterstützen. Dabei hat er alle biblischen Geschichten im Kopf und hat grosses Interesse für das Stoffliche (...).»

die zwei Ausschnitte stammen von F. Bützberger, Manuskript Nr. 348, S. 99
aus Ahrens: Briefwechsel zwischen C.G.J. Jacobi und seinem Bruder M.H. Jacobi, S. 103–119

Kommentar:
Die letzten Zeugnisse zeigen die menschliche Seite der Mathematiker. Dass Steiner sich mit Frau Dirichlet nicht verstand, wird auch bei anderen Gelegenheiten deutlich. So soll Steiner eine Einladung im Hause Dirichlets mit wenig schmeichelhaften Worten abgelehnt haben. Was hat Steiner für ein Verhältnis zu Frauen gehabt? Er war nie verheiratet und in seinen Unterlagen finden sich kaum Hinweise – ausser vollbeschriebenen Notizblättern, auf denen der Name «Emilie» immer wieder auftaucht. (siehe Titelfoto)



Handschrift Jakob Steiners, Burgerbibliothek Bern

Wichtig scheinen mir die Briefstellen von Jacobi deshalb, weil der Schreiber auf für Steiner charakteristische Züge hinweist: die Anschauung (im reinsten Sinne des Wortes), die (auch körperliche) Ausdauer, das Selber-Tun-Wollen. Eigentlich muten diese Eigenschaften direkt modern an.
Was hat Steiner für ein Verhältnis zur Religion gehabt? Hat er sich etwa gegen das Auswendiglernen des Katechismus gewehrt (Nachbetung!), dafür die Bibel (die Quelle) gelesen? Steiner hat nie viel gelesen, was gelegentlich zu Schwierigkeiten führte, wenn er bereits bekannte Lehrsätze (wieder-)entdeckte. Mit dieser Einstellung ist er ein treuer und konsequenter Schüler Pestalozzis geblieben. Was würde Steiner zur heutigen «Konsumhaltung» zu sagen haben?

Arbeitet und suchet, damit ihr findet und nicht in Nachbetung verfallet.
(Motto zu einem Lehrgang der Planimetrie aus dem Jahre 1819 von J. Steiner)

EIN UNTERRICHTSBEISPIEL AUS DEM GTZ

Die Steinerschen Kreisketten

Der begabte Mathematikstudent Christian Wüthrich beschreibt hier die Anwendung eines Steinerschen Satzes anhand eines konkreten Beispiels, das er selber mit Schülerinnen und Schülern der 9. Klasse im GTZ ausprobiert hat.

Einleitend möchte ich an dieser Stelle Herrn Hachen, Lehrer an der Schule in Utzenstorf, und Herrn Kummer, Lehrer am Gymnasium Burgdorf, für ihre Unterstützung bei diesem Projekt danken.

1. Das Projekt

Dieses Jahr hätte Jakob Steiner seinen 200. Geburtstag gefeiert, er ist in Utzenstorf aufgewachsen und zur Schule gegangen. In Utzenstorf erinnert nur noch die Gedenktafel an der Kirche und der Jakob-Steiner-Preis, der laut Testament jedes Jahr an den besten Kopfrechner der Schule Utzenstorf vergeben werden soll. Aber das, was ihn berühmt gemacht hatte, seine Mathematik, kennt fast niemand mehr. Im Schulunterricht ist es auch schwierig, etwas davon darzustellen, weil es oft zu schwierig ist.
Ich setzte mir das Ziel, trotzdem etwas mit den Schülerinnen und Schülern in Utzenstorf zu versuchen. Steiner konnte unglaublich genau zeichnen. Ich fragte in der Sekundarschule Utzenstorf an, ob ich im Geometrisch-Technischen Zeichnen eine Wettbewerbsaufgabe stellen dürfe, die diese Genauigkeit fordert. Auf die Zusage hin stellte ich im Unterricht das Problem vor und zeigte die Konstruktion.
Ich verlangte eine Zeichnung einer Steinerschen Kreiskette (mit nichtkonzentrischen Kreisen) auf einem A3-Blatt. Die beste, das heisst exakteste Zeichnung sollte augezeichnet werden.
Die Voraussetzungen, um eine solche Kreiskette zu konstruieren, sind erst in der 9. Klasse gegeben. Zusätzlich zum Unterrichtsstoff (Thaleskreis, Tangente an den Kreis) benötigt man den Begriff der geometrischen Abbildung und das Konstruktionsverfahren der Inversion.

2. Was sind Steinersche Kreisketten?

Es sind zwei Kreise n und N gegeben, die sich weder schneiden noch berühren. Nun lässt sich ein Kreis m_1 irgendwo zwischen diese Kreise legen, der beide berührt. Nun konstruiert man einen Kreis m_2, der neben n und N auch noch m_1 berührt. Schliesslich lässt sich so eine Folge von Kreisen m_i legen, die alle n, N und m_{i-1} berühren, das ist eine **Steinersche Kreiskette.**

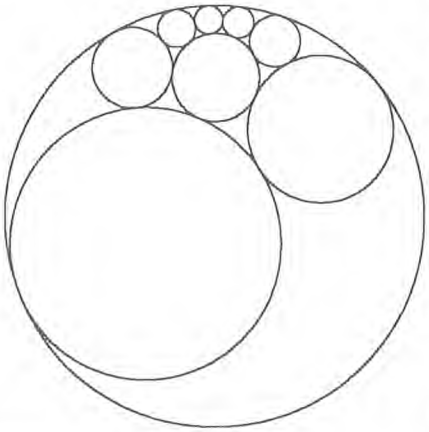


Abb. 1
Ein Beispiel einer 7-gliedrigen Steinerschen Kreiskette, die sich schliesst.

Der berühmte Schliessungssatz von Steiner lautet nun:

> Wenn zwei Kreise n und N so liegen, dass für eine beliebige Kreiskette m_i ein $i_0 \in N$ mit $m_{i0} = m_1$ gibt, so gilt auch für jede andere Kreiskette m_i', dass $m_{i_0}' = m_1'$ gilt.

Beweis:
Durch eine Inversion können die beiden Kreise n, N in zwei konzentrische Kreise abgebildet werden, und für diese ist der Satz trivial.
Bemerkung:
Das heisst, wenn sich eine Kreiskette schliesst, so schliesst sich jede andere, unabhängig davon wie der Anfangskreis gewählt wurde. Es muss gar nicht sein, dass sich die Kette schon nach einer Umdrehung schliesst. Der Satz gilt auch, wenn die beiden gegebenen Kreise n, N ausserhalb voneinander liegen.

3. Geschichtliches

Schon während seines Studiums in Heidelberg und seiner Zeit als Privatlehrer fand Steiner seine ersten Resultate. Eine der ersten Arbeiten, die er veröffentlichte, war «Einige geometrische Betrachtungen». In diesen entwickelte er die ganze Theorie zum Schneiden und Berühren der Kreise. Steiner hatte nicht die Gewohnheit, viel zu lesen, und deshalb erstaunt es nicht, dass er in dieser Arbeit hauptsächlich Resultate französischer Geometer wiederentdeckte.
In dieser Arbeit erwähnte er auch das erste Mal diesen Schliessungssatz.
Die Entdeckung der Inversion wird heute Plücker und Magnus zugeschrieben, es ist aber sicher, dass Steiner diese geometrische Abbildung und ihre wichtigsten Eigenschaften schon bei der Veröffentlichung dieser Arbeit kannte, also 10 Jahre früher.

4. Die Konstruktion

Es wäre fast unmöglich, die Konstruktion auszuführen, wie ich sie oben beschrieben habe (Kreise zu konstruieren, die drei gegebene Kreise berühren). Aber man kann die Steinerschen Kreisketten auch rückwärts erhalten. Man zeichnet eine konzentrische Kette und bildet diese mit einer Inversion in eine nicht-konzentrische ab. Um den konzentrischen Fall zu zeichnen, nimmt man am besten eine 8-, 6-, 4- oder 3-gliedrige Kette, weil man diese einfach konstruieren kann.
Schliesslich muss der Begriff der geometrischen Abbildung erläutert werden: Vergleiche mit Photographieren, Schatten.

4.1. Die Inversion eines Punktes

Eine Inversion macht man bezüglich eines Inversionskreises ω. Die Punkte auf dem Kreis bleiben liegen. Jeder Punkt ausserhalb des Inversionskreises ω tauscht den Platz mit einem Punkt innerhalb. Der Mittelpunkt W von ω hat sein Bild im Unendlichen.

4.1.1. Die Inversion eines Punktes ausserhalb des Inversionskreises

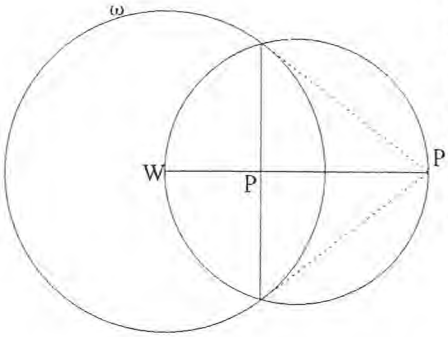


Abb. 2

Ein Punkt P ausserhalb des Inversionskreises ω wird abgebildet, indem man über der Strecke $\overline{PW}$ den Thaleskreis konstruiert, und diesen mit ω schneidet. Die beiden Schnittpunkte werden verbunden. Das Bild P' von P liegt auf dem Schnittpunkt dieser Strecke und $\overline{PW}$. Es ist also der Fusspunkt des Lotes vom Berührungpunkt der Tangente von P an den Kreis auf die Strecke $\overline{PW}$.

4.1.2. Die Inversion eines Punktes innerhalb des Inversionskreises

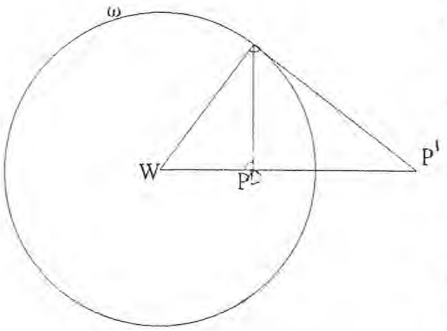


Abb. 3

Es sei P dieser Punkt. Man schneidet die Senkrechte zu $\overline{PW}$ durch P mit ω. An einem dieser Punkte legt man die Tangente an den Kreis. Das Bild von P liegt auf dem Schnittpunkt dieser Tangente und der Geraden durch P und W.

4.2. Die Inversion eines Kreises

Die wichtigste Eigenschaft der Inversion für unsere Zwecke ist die Tatsache, dass Kreise wieder in Kreise abgebildet werden, dass aber das Bild des Mittelpunktes des ursprünglichen Kreises nicht der Mittelpunkt des Bildkreises ist, das heisst das Bild von M im allgemeinen nicht gleich N;
aber W, M und N liegen auf einer Geraden.

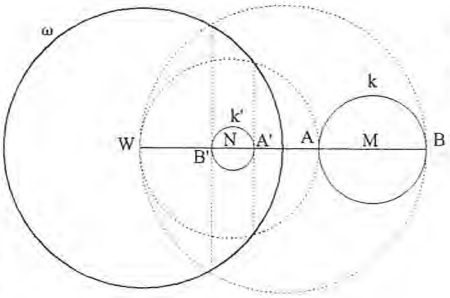


Abb. 4

So wird k invertiert: Man zeichnet die Bilder der Schnittpunkte A und B von k mit der Geraden durch W und M. Das Bild des Kreises k ist der Thaleskreis über $\overline{A'B'}$.
Als einfache Kontrolle kann man die Tangenten von W an k zeichnen, sie sollten auch Tangenten von k' sein.

4.3. Zur Inversion

Die Inversion ist die Abbildung w:

$$C\setminus\{0\} \to C\setminus\{0\}, z \to \frac{1}{z}.$$

Mit der Klasse könnte man eventuell parallel zu der Konstruktion im Mathematikunterricht mit Hilfe des Kathetensatzes beweisen, dass $|\overline{PW}| = \frac{1}{|\overline{P'W}|}$ ist, wenn der Radius des Inversionskreises 1 gesetzt wird. Damit wäre auch erklärt, warum diese Abbildung Inversion heisst.

5. Die Konstruktion der Kreisketten

Hat man die konzentrische Kreiskette gezeichnet, kann man einen Inversionskreis wählen und alle Kreise invertieren. Man sollte den Mittelpunkt W nicht zu nah an einen Kreis wählen, da sein Bild sonst viel zu gross wird. Unbedingt zuvor Skizzen machen, ob das Bild auch wirklich ganz auf das Zeichnungsblatt zu liegen kommt.

6. Schlussbemerkung

Ich habe selbst einige Beispiele konstruiert und musste jeweils feststellen, dass die Zeichnung furchtbar ungenau wurde. Das Problem liegt auch noch darin, dass man selten so mogeln kann, dass es danach besser aussieht. Ich war deshalb etwas skeptisch, ob die Zeichnungen der Schüler und Schülerinnen gut gelingen würden. Aber ich wurde positiv überrascht. Die Zeichnungen waren zum Teil so perfekt, dass man kaum eine Abweichung bei den Berührpunkten sah.

Diese Aufgabe eignete sich sehr gut, um die Genauigkeit beim Konstruieren zu fördern. Was leider fehlt, aber für den GTZ-Unterricht wichtig wäre, ist die dritte Dimension.

Christian Wüthrich, wohnhaft in Utzenstorf, bis Frühling 1996 Gymnasiast in Burgdorf, 2mal Teilnahme an Internationaler Mathematik-Olympiade in Toronto und Istanbul, Teilnahme an mehreren math. Lagern (sjf, Schülerakademie). Mitarbeit an der Ausstellung in Utzenstorf zu Ehren von Jakob Steiner. Ab diesem Herbst Aufnahme des Mathematikstudiums in Genf.

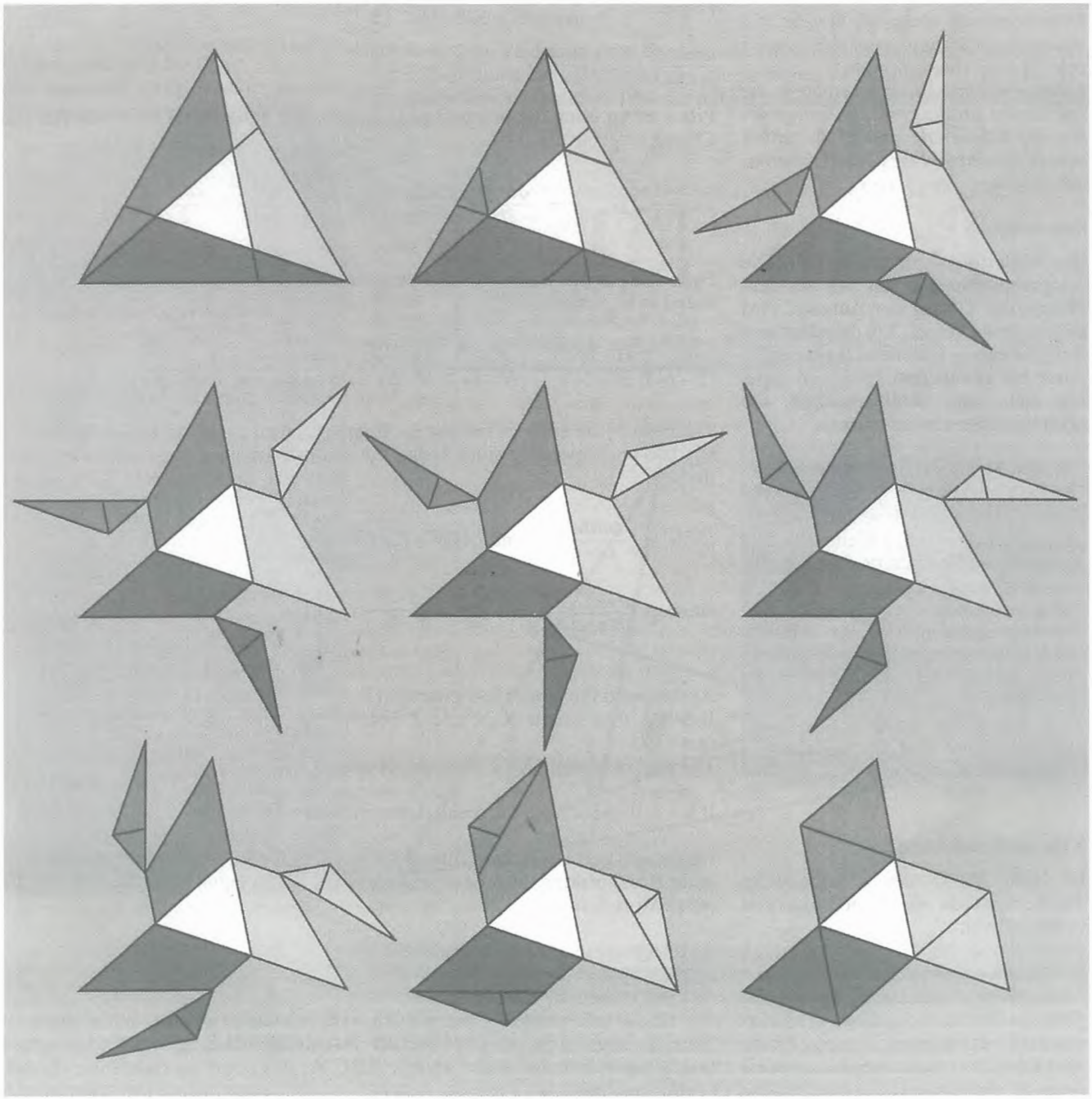
MATHEMATIK FÄCHERÜBERGREIFEND

Spuren einer Aufgabe

Aus einer intensiven Auseinandersetzung mit der vorhandenen Literatur zum Thema Jakob Steiner und seinen Lehrsätzen ist der folgende Beitrag von U. Schweizer entstanden, in dem er Ausschnitte aus einem regen Mathematik-Diskurs in einer Fachzeitschrift wiedergibt. Auch in diesem Beitrag liegt vielseitiges Grundlagenmaterial für den Mathematikunterricht auf der Sekundarstufe I/II vor, das sogar fächerübergreifend mit Englisch- oder Geschichtsunterricht angewendet werden kann.

1. Problemstellung

Das folgende Titelbild zierte das Heft 2/1992 der amerikanischen Zeitschrift «The Mathematics Teacher»:



Dazu gehört der Kommentar im Innern des Heftes:
About the cover
A segment is drawn from each vertex of an equilateral triangle to a point one-third of the way along the opposite side. The area of the small equilateral triangle formed in the center is one-seventh the area of the original triangle.
To demonstrate, draw segments from the midpoints of the sides of the larger triangle to the vertices of the small triangle. The obtuse triangles formed are rotated 180 degrees. The resulting figure is composed of seven identical equilateral triangles in a triskelion formation.
(Cover design by William I. Johnston, editor, Houghton Mifflin Company)

Und im gleichen Heft:
Cover activity
Draw segments joining the vertices of a square to the midpoints of the square's sides in a systematic fashion.
Using a rotation strategy similar to the one shown on the cover, find the relationship between the area of the central square formed and the area of the original square.

Kommentar:

Die Bilderfolge spricht für sich. Die Aufgabenstellung ergibt sich aus dem «Film», die Lösung der Aufgabe wird gerade mitgeliefert. Ein wunderbares Beispiel eines «visuellen» Beweises!
Aber bei genauerem Hinsehen ergeben sich viele «Unklarheiten», die noch beseitigt werden müssen:

Woher wissen wir, dass das mittlere kleine Dreieck auch gleichseitig ist?
Warum ist die Verbindung einer Ecke X des mittleren kleinen Dreiecks mit der Seitenmitte des grossen Dreiecks gerade parallel zu der Seite x des kleinen Dreiecks?
Warum ergänzen sich die Winkel und die Strecken in der zweitletzten Figur gerade so «passend»?
Entstehen in der letzten Figur wirklich Rhomben, die sich aus zwei gleichseitigen Dreiecken zusammensetzen lassen?

2. Weitere Entwicklung

In Heft 7/1992 des «Mathematics Teacher» wurde ein erster Leserbrief veröffentlicht:

Unit fractional divisions
I have been a member of the NCTM (National council of teachers of mathematics) for many years, but never before have I spent so much time on the outside cover of the magazine before reading the articles inside as I did with the 2/1992 issue!
Why, I wondered, would the segments drawn from each vertex of an equilateral triangle to a point one-third of the way along the opposite side result in a smaller equilateral triangle with an area exactly one-seventh of the original triangle?
Do other «unit fractional divisions» of the original sides create an equilateral triangle with an area that is also a unit fraction of the original triangle?
Given: Equilateral triangle ABC. For integers $b \geq 2$, a segment is drawn from each vertex to a location 1/b of the way along the opposite side (see fig. 1).

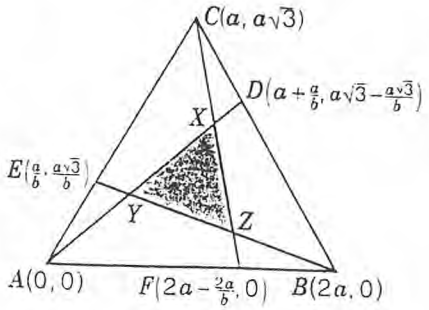


Fig. 1
$FB = DC = EA = \frac{1}{5} \cdot AB$
$AB = BC = CA$

Prove:

$$\frac{area\Delta XYZ}{area\Delta ABC} = \frac{(b-2)^2}{b^2-b+1}$$

Proof: From using the point-slope technique, the equation of lines AD, BE and CF are, respectively,

$$y = \frac{b-1}{b+1}\cdot\sqrt{3}x, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{1-2b}\cdot x - \frac{2a\sqrt{3}}{1-2b} \quad \text{and} \quad y = \frac{b\sqrt{3}}{2-b}\cdot x + \frac{2a(1-b)}{2-b}\cdot\sqrt{3}$$

By looking at the intersections of these lines, the coordinates of points X, Y, Z are found to be, respectively,

$$\left(\frac{a(b^2-1)}{b^2-b+1}, \frac{a(b-1)^2\sqrt{3}}{b^2-b+1}\right), \left(\frac{a(b+1)}{b^2-b+1}, \frac{a(b-1)\sqrt{3}}{b^2-b+1}\right), \left(\frac{a(2b^2-4b+3)}{b^2-b+1}, \frac{a\sqrt{3}}{b^2-b+1}\right)$$

The ratio of the areas of two similar figures is equal to the square of the ratio of any two corresponding sides. Using the distance formula, the reader can verify that

$$(XY)^2 = \frac{4a^2(b-2)^2}{b^2-b+1} \quad \text{and} \quad (AB)^2 = (2a)^2 = 4a^2$$

Hence, $$\frac{area\Delta XYZ}{area\Delta ABC} = \left(\frac{XY}{AB}\right)^2 = \frac{(b-2)^2}{b^2-b+1}$$

At this point the reader is encouraged to test the formula for some special cases: If b = 2, then points X, Y, and Z become the centroid of a triangle ABC, or $(a, a\sqrt{3}/3)$
The area of triangle XYZ vanishes, of course, to 0.

If b = 3, then we have the result demonstrated on the cover of the 2/1992 issue.

Lastly, as b gets larger the value of 1/b gets smaller, forcing point F very close to point B and making the area of triangle XYZ almost equal to the area of triangle ABC. More formally,

$$\lim_{b\to\infty}\frac{(b-2)^2}{b^2-b+1} = 1$$

The reader will remember that we originally wondered whether other unit fractional divisions of the sides would create an equilateral triangle XYZ with an area that is a unit fraction of the triangle ABC. At this point we must solve the following inequality:

$\frac{(b-2)^2}{b^2-b+1} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow b^2-7b+7 \leq 0 \Rightarrow \quad 1.2087 \leq b \leq 5.7913$

The reader can then easily verify using 2, 3, 4, and 5 for b that the only unit fractional division that creates an equilateral triangle with an area that is also a unit fraction of the original equilateral triangle occurs when b = 3.

Don R. Warkentin, 1501 Vermont Avenue, Dinuba, CA 93618

Kommentar:
Mit diesem Leserbrief, dem übrigens noch eine Antwort des Autors W. I. Johnston angefügt ist, sind ganz neue mathematische Gebiete angesprochen worden: Zuerst wird der elementargeometrische Zugang (→ Synthetische Geometrie nach J. Steiner) durch einen analytischen Beweis ergänzt ((→ Analytische Geometrie). Dann wird die Fragestellung erweitert für andere Bruchteile und schliesslich wird eine zahlentheoretische Fragestellung wichtig (Suche nach Stammbrüchen für das Flächenverhältnis).

3. Anschlussfragen

Es folgen eine ganze Reihe von Leserbriefen (vorläufig bis 1996).
Aus dem reichhaltigen Material seien einige Fragestellungen ausgewählt:

- → Lässt sich die Verallgemeinerung ($b \neq 3$) auch geometrisch «visualisieren»? (Antwort von Johnston in 7/1992).
- → Was geschieht, wenn man die Bedingung der «Gleichseitigkeit» des Dreiecks ABC fallen lässt?
- → Auch der Flächeninhalt des Dreiecks DEF lässt sich berechnen (auch bei andern Seitenteilungsverhältnissen).
- → Was lässt sich über Streckenteilungen und Streckenlängen sagen? Z.B. das Verhältnis der Abstände der Ecken des kleinen Dreiecks zu je einer Seite des Ausgangsdreiecks, die Summe dieser drei Strecken verglichen mit den Höhen des Ausgangsdreiecks, oder die Verhältnisse, in denen die Transversalen geteilt werden.
- → Wenn die Seiten gedrittelt werden, können zu beiden Teilpunkten Transversalen gezogen werden. Dann entsteht in der Mitte ein Sechseck. Wie gross ist sein Flächeninhalt?
- → Kann die Aufgabenstellung auch auf Polygone (n>3) erweitert werden?

Im Heft 5/1996 wird ein diesem Problem zugrunde liegender «Satz von Steiner» erwähnt.
Also schauen wir einmal nach!

4. Zwei Beiträge aus dem 19. Jahrhundert

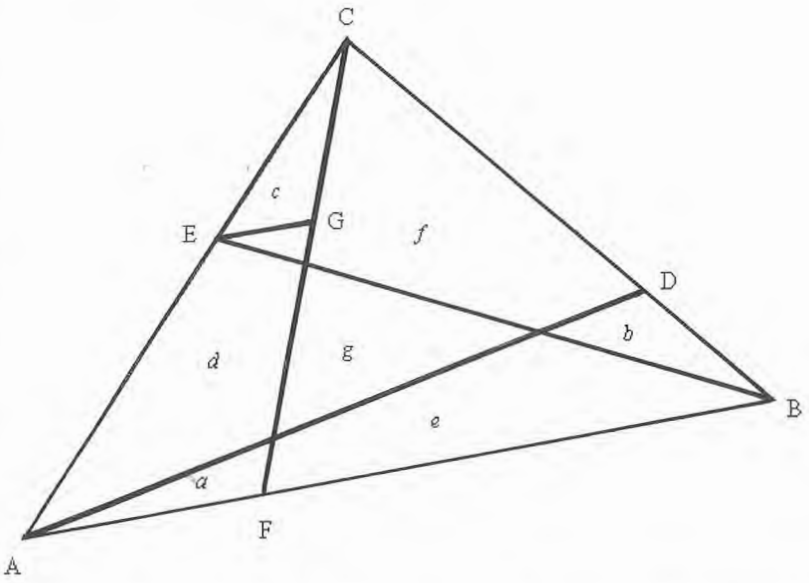
4.1. Jakob Steiners Beitrag

Im Band I der «Gesammelten Werke» von Jakob Steiner findet sich auf den Seiten 165–168 eine kleine Abhandlung, die im folgenden (zum Teil) wiedergegeben sei. Das wäre ein möglicher Text, der mit einer Klasse im Original gelesen werden könnte.

Bemerkungen zu einer Aufgabe in Crelle's Journal Band III. S.197 – 198:

Herr Clausen behandelt in Crelle's Journal Band III. S. 197 – 198 folgende Aufgabe:

1) «In einem Dreieck ABC sei
AF =k·AB, BD = k· BC, CE =k· CA,
man soll den Inhalt der verschiedenen, durch die Durchschnitte der Linien AD, BE, CF entstandenen Dreiecke (und Vierecke) finden».



Diese Aufgabe gehört zu einer Abtheilung von Elementar-Aufgaben, welche die Pestalozzi'sche Schule wegen mancherlei pädagogischer Vorzüge sehr in Betracht zog, und die besonders der Director der Gewerbeschule zu Berlin, Herr Kloeden, sehr ausgebildet hat und bei seinem Unterricht mit dem besten Erfolg ausübt. Nach dieser Elementarübung wird die obige Aufgabe ohne Hülfe trigonometrischer Functionen gelöst; auch kann sie allgemeiner gestellt werden, so dass die obige nur als ein einzelner Fall erscheint, nämlich wie folgt:

2) «Es seien die Seiten des gegebenen Dreiecks ABC (Fig.) auf irgend eine Weise getheilt, z. B. so, dass
$AF = \alpha \cdot AB$, $BD = \beta \cdot BC$, $CE = \gamma \cdot CA$,
man soll den Flächeninhalt eines jeden der sieben Stücke angeben, in welche das Dreieck durch die drei Geraden AD, BE, CF getheilt wird».

Ist die Gerade EG mit AB parallel, so ist CE : CA = EG : AF, also

$$EG = \gamma \cdot AF = \gamma \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot BF,$$

und da aus den selben Gründen EG : BF = EH : HB, so ist eben so

$$EH = \gamma \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot HB,$$

und daher

$$EB = EH + HB = \left(1+\gamma\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)HB = \frac{1-\alpha+\alpha\gamma}{1-\alpha}HB,$$

folglich $$\frac{EH}{EB} = \frac{\alpha\gamma}{1-\alpha+\alpha\gamma}$$

und da die Dreiecke c und CEB sich wie ihre Grundlinien EH, EB verhalten, so ist

$$c = \frac{\alpha\gamma}{1-\alpha+\alpha\gamma} CEB.$$

Wird nun der Inhalt des gegebenen Dreiecks durch (dargestellt, so ist $CEB = \gamma \cdot \Delta$ daher wird

$$(1) \qquad c = \frac{\alpha\gamma^2}{1-\alpha+\alpha\gamma}\Delta$$

und vermöge der Analogie hat man eben so

$$(2) \qquad b = \frac{\gamma\beta^2}{1-\gamma+\gamma\beta}\Delta$$

$$(3) \qquad a = \frac{\beta\alpha^2}{1-\beta+\beta\alpha}\Delta.$$

Da z.B. das Viereck
$d = AFC - c - a$,
so hat man ferner, (weil AFC gleich $\alpha\Delta$),

$$(4) \qquad d = \alpha\left(1-\frac{\gamma^2}{1-\alpha+\alpha\gamma}-\frac{\beta\alpha}{1-\beta+\beta\alpha}\right)\Delta$$

desgleichen

$$(5) \qquad e = \beta\left(1-\frac{\alpha^2}{1-\beta+\beta\alpha}-\frac{\gamma\beta}{1-\gamma+\gamma\beta}\right)\Delta,$$

$$(6) \qquad f = \gamma\left(1-\frac{\beta^2}{1-\gamma+\gamma\beta}-\frac{\alpha\gamma}{1-\alpha+\alpha\gamma}\right)\Delta.$$

Endlich ist das Dreieck
$g = -AFC - BDA - CEB + a + b + c$,

Meine persönliche Beziehung zu dieser Aufgabe

Im Rahmen der Ähnlichkeitslehre und der Flächenberechnungen gehörten einfache Aufgaben, bei denen Teilungsverhältnisse oder Grössen von Teilflächen berechnet werden sollten, schon immer zum Repertoire, insbesondere die Eigenschaft der Seitenhalbierenden. Auch bei der Einführung der Vektorrechnung können derartige Aufgaben gestellt werden (z.B. H. Bachmann: Vektorgeometrie, SABE-Verlag), oder im Zusammenhang mit den Anwendungen trigonometrischer Beziehungen (Sinus- und Cosinussätze).
Von solchen Aufgaben war ich als Schüler immer fasziniert, spielen doch vielfältige mathematische Beziehungen mit – und meistens gibt es nicht einfach einen einzigen Lösungsweg. Es ist auch ein steter Wechsel zwischen Geometrie (Anschauung, visuelle Fähigkeiten) und Algebra (abstrakte Anwendung von Regeln, «sequentielle» Fertigkeiten) mit der Lösung solcher Aufgaben verbunden. Gefordert wird Intuition, Phantasie, gepaart mit Hartnäckigkeit und logischer Strenge. Besonders das Buch von H.S.M. Coxeter [1], das ich mir bereits als Neuntklässler zu Weihnachten wünschte, hat mich sehr angesprochen und angeregt. Hier (Seiten 256/257) wird die «Aufgabe von Steiner» gelöst, allerdings mit Hilfe von Baryzentrischen Koordinaten und ohne den Namen Steiners zu erwähnen. Dafür wird ein Zusammenhang hergestellt mit der Formel von Pick. Als ich später in einem Artikel (Quelle nicht mehr auffindbar) dann noch las, dass dieses Resultat zum Allgemeingut der Errungenschaften des 19. Jahrhunderts gehört, liess mich die Neugier nicht mehr los.
Ein anderer Gedankengang führte mich von Pestalozzi her: Eine Bemerkung in einem Seminar zur Geschichte der Pädagogik (etwa 1973) liess mich immer wieder nach Hinweisen suchen, worin denn eigentlich die auf Anschauung beruhende Methode des grossen Pädagogen für die Mathematik bestehen konnte – sicher nicht auf der immer wieder dargestellten «Einheitstabelle»!
Ein weiterer Entwicklungsweg führte über meine Mitarbeit in der Lehrerfortbildung. Es ging um die Motivation zum Rechnen mit gewöhnlichen Brüchen. Herr Otto Weber (heute im Ruhestand, damals Lehrer in Meinisberg) hat – für mich ganz

daher wird

$$(7)\quad g=\left(1-\alpha-\beta-\gamma+\frac{\beta\alpha^2}{1-\beta+\beta\alpha}+\frac{\gamma\beta^2}{1-\gamma+\gamma\beta}+\frac{\alpha\gamma^2}{1-\alpha+\alpha\gamma}\right)\Delta$$

$$=\left(1-\frac{(1-\alpha)\gamma}{1-\alpha+\alpha\gamma}-\frac{(1-\beta)\alpha}{1-\beta+\alpha\beta}-\frac{(1-\gamma)\beta}{1-\alpha+\alpha\gamma}\right)\Delta.$$

Schneiden die drei Geraden AD, BE, CF einander in einem Puncte, so ist g = 0, und für diesen Fall hat man also die Bedingungsgleichung

$$(8)\quad \frac{(1-\alpha)\gamma}{1-\alpha+\alpha\gamma}+\frac{(1-\beta)\alpha}{1-\beta+\alpha\beta}+\frac{(1-\gamma)\beta}{1-\gamma+\beta\gamma}=1,$$

oder auch

$$(9)\quad \alpha\beta\gamma=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$$

3) Der angeführte Satz entspringt aus dem vorstehenden, wenn man $\alpha=\beta=\gamma$ setzt. Für diesen besonderen Fall hat man

$$(10)\quad a=b=c=\frac{\alpha^2}{1-\alpha+\alpha^2}\Delta \qquad ((1),(2),(3))$$

$$(11)\quad d=e=f=\frac{\alpha(1-\alpha-\alpha^2)}{1-\alpha+\alpha^2}\Delta \quad ((4),(5),(6))$$

$$(12)\quad g=\left(1-3\alpha+3\frac{\alpha^2}{1-\alpha+\alpha^2}\right)\Delta \quad (7)$$

$$=\frac{1-4\alpha+4\alpha^2}{1-\alpha+\alpha^2}\Delta$$

Im Aufsatz Steiners wird anschliessend eine ähnliche Aufgabe (ebenso leicht) gelöst und auf das dreidimensionale Analogon (dreiseitige Pyramide) übertragen.

4.2. Steiners Quelle

Es mag uns interessieren, was in dem von Steiner erwähnten Aufsatz steht; also in Crelle's Journal Band III, S. 197–198.:

Geometrische Sätze
(von Herrn Th. Clausen zu Altona)

«In einem Dreieck ABC sei
AF = k·AB, BD = k· BC, CE = k· CA;
den Inhalt der verschiedenen, durch die Durchschnitte der Linien AD, BE, CF entstandenen Dreiecke zu finden».
Seien die Winkel CAB = α, ABC = β, BCA = γ, und der Durchmesser des umschriebenen Kreises = 1, so ist:

AB = sin γ ;	AF = k· sinγ;
BC = sin α ;	BD = k· sin α ;
CA = sin β ;	CE = k· sinβ;

$$\tan DAB=\frac{BD\cdot\sin\beta}{AB-BD\cdot\cos\beta}=\frac{k\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\gamma-k\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$\tan AFC=\frac{AC\cdot\sin\alpha}{AF-AC\cdot\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{k\cdot\sin\gamma-\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

neu – das Rechnen mit Brüchen an geometrischen Figuren geübt: Figuren wurden unterteilt, zuerst Quadrate, dann andere Vierecke, andere Vielecke, schliesslich Würfel und andere Körper. Stets war die Frage: «Welchen Bruchteil der ganzen Figur macht der schraffierte Teil aus?» Besonders eine ganze Aufgabenserie (als Werkstatt-Posten denkbar) mit Würfelteilen hat mich fasziniert. (Übrigens führt hier ein Weg direkt weiter zu der künstlerischen Ausgestaltung bei Max Bill, z.B. Kugelteile).
Inzwischen begann ich mich mit Jakob Steiner zu beschäftigen, dem ich im Studium öfters begegnet war. Ich besuchte Utzenstorf (Inschrift an der Kirche) und suchte die Gedenktafel im Konservatorium Bern.
Da erschien 1992 das Bild im «Mathematics Teacher» und der ganze folgende Briefwechsel.
Hier ist interessant, wie sich das ganze «Aufgabenfeld» entwickelt: mehrmals werden Computerprogramme erwähnt, mit deren Hilfe Vermutungen aufgestellt werden (Sketchpad, GeoExplorer u.a.). Erst im Heft 6/1994 wird erstmals Coxeter erwähnt (Introduction to Geometry, New York, 1989). Auch die Formel von Pick und der Satz von Ceva werden erwähnt. In einem Beitrag (nicht nur Leserbrief) wird in Heft 5/1996 zu einer Erweiterung Stellung genommen (Morgan's theorem: Flächeninhalt des Sechsecks, das entsteht, wenn zu jeder Seite des Dreiecks beide Drittelstransversalen gezeichnet werden). Hier wird der zugrundeliegende Satz als «Satz von Steiner» zitiert (nach Coxeter, 1989). Die Art und Weise, wie sich der Briefwechsel entwickelt (immer mit Antwortmöglichkeit des angesprochenen Autors) entspricht wahrscheinlich dem, was sich Pestalozzi vorgestellt hat unter lebendigem, sich selbst entwickelndem Unterricht – auf jeden Fall sind die Kollegheftе Jakob Steiners (in der Burgerbibliothek Bern) genau nach diesem Prinzip aufgebaut.
So führen die Spuren zusammen.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich noch Herrn F. Bachmann danken, der mir eine Lösung der Steiner'schen Aufgabe zugeschickt hat, die er mit dem Programm «Mathematica» erhalten hat. Sein Kommentar dazu möge den Abschluss bilden: «Natürlich hat diese Lösung nichts mehr vom Reiz der klassischen Elementargeometrie – Steiner hätte sicher keine Freude daran.»

Es ist aber

$$AI = \frac{AF \cdot \sin AFI}{\sin(DAB+AFC)},$$

$$2\,\Delta AFI = AF\,(\,AI\,(\,\sin DAB = \frac{AF^2 \sin DAB \cdot \sin AFC}{\sin(DAB+AFC)} = AF^2 \cdot \frac{\tan DAB \cdot \tan AFC}{\tan DAB+\tan AFC}$$

$$= \frac{k^3 \sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta \cdot \sin^2\gamma}{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma - k(\sin\alpha \cos\alpha \sin^2\beta + \sin^2\alpha \sin\beta \cos\beta) + k^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma},$$

Da aber $\gamma = 180 - \alpha - \beta$, so ist $\sin\gamma = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, und also

$$2\,\Delta AFI = \frac{k^3}{1-k+k^2} \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = 2\frac{k^3}{1-k+k^2}\Delta ABC$$

oder

$$(1.)\ \Delta AFI = \frac{k^3}{1-k+k^2}\Delta ABC$$

Da dieser Werth in Beziehung auf die drei Seiten symmetrisch ist; so sind die beiden Dreiecke HEC und GDB dem Dreiecke AFI gleich.
Es ist ferner $\Delta AFC = k\,\Delta ABC$, also

$$(2.)\ AEHI = CDGH = BGIF = \left(k - \frac{2k^3}{1-k+k^2}\right)\Delta ABC$$

$$= \frac{k-k^2-k^3}{1-k+k^2}\Delta ABC$$

$$(3.)\ GHI = \left(1 - 3\frac{k^3}{1-k+k^2} - 3\frac{k-k^2-k^3}{1-k+k^2}\right)\Delta ABC$$

$$= \frac{1-4k+4k^2}{1-k+k^2}\Delta ABC$$

Wenn $k = \frac{1}{2}$, so ist der Inhalt des Dreiecks GHI = 0, oder die Linien AD, BE, CF schneiden sich in diesem Falle in einem Puncte; welches auch sonst bekannt ist.

Bemerkung:

Es scheint, dass die zugehörige Skizze verlorengegangen ist. Wenn man versucht, die einzelnen Schritte zu verstehen, ergibt sich die Skizze und ihre Beschriftung von selbst.
Die Gegenüberstellung der verschiedenen «Beweise» provoziert geradezu Fragen, wie: Welcher Beweis ist der «beste»? Was heisst «Beweis» nun? – Welches ist der «schönste» Beweis?

5. Nachbemerkungen

5.1. Bemerkungen zur Geschichtsschreibung

Im Buch von H.S.M. Coxeter [1] findet sich kein Hinweis auf Jakob Steiner, obschon Coxeter ihn sonst häufig erwähnt und zitiert. Der Satz wird als «Satz von Routh» aufgeführt.
Im Buch [2] von Peter Baptist wird der Satz eingeleitet mit: «Ein klassisches Ergebnis der Elementargeometrie des 19. Jahrhunderts (...) ist der sog. Satz von Routh». Dann wird auf Coxeter verwiesen. Baptist geht der Person Routh nach und gibt die Lebensdaten an: 1831–1907. (Vgl. [2] S. 62 ff.). Die Publikation von Jakob Steiner datiert aber bereits aus dem Jahre 1828 – und Steiner gibt ja nur einen elementaren Beweis eines schon bekannten Satzes, der offenbar bereits an den Schulen Pestalozzis gelehrt wurde.
Ist es also so, dass mathematisches Wissen auch wieder verlorengeht?

5.2. Operative Prinzipien

Je nach Autor und Zusammenhang wird der Begriff «operativ» verschieden definiert. Wittmann ([6] S. 53) schreibt:

Geometrische «Objekte» sollen nicht statisch und nicht isoliert voneinander studiert werden, sondern im Zusammenhang mit Verfahren zu ihrer Konstruktion und mit «Operationen», die

man an ihnen vornehmen kann. Und weiter (S. 114): Die operative Methode ist naturgemäss für forschend-entwikkelndes Arbeiten und für Problemlösen besonders förderlich.

Ich möchte dazu erwähnen:

- die verschiedenen Stufen der mathematischen Methoden
  - Elementargeometrische Methoden (Flächenzerlegung, Kongruenzabbildungen)
  - Trigonometrie
  - Analytische Geometrie (Koordinatensystem, Verwendung linearer Transformationen)

- die verschiedenen Stufen der Verallgemeinerung
  - der Figuren
  - der Seitenunterteilungen
  - auf drei Dimensionen übertragen

- Verändern der Fragestellung
  - andere Teilflächen
  - Strecken. Ihre Längen und ihre Teilungen
  - Betrachtung anderer (zusätzlicher) Transversalen

- Verändern des Interesses
  - Beweismethoden
  - Zahlentheoretische statt geometrische Fragen
  - Stilistische Unterschiede (der einzelnen Autoren)
  - Historische Gesichtspunkte.

5.3. Einsatzmöglichkeiten im Unterricht

Die vorliegende Aufgabe kann rein experimentell auf der Primarstufe und der Sekundarstufe I gebracht werden. Die Schülerinnen und Schüler können durch Handeln (Ausschneiden der Figuren, zerschneiden und neu zusammensetzen) und einfaches Berechnen Resultate erzielen. Sie können auch schon ergänzende Fragen stellen (andere Seitenteilungen, andere Ausgangsfiguren).
Für die Sekundarstufe II wird der Aufgabenkreis interessant durch die Vergleichsmöglichkeit zwischen verschiedenen Beweisführungen. Zudem kann die Aufgabenstellung beliebig verändert werden.
Das aufgeführte Material (und die vielen Erweiterungsmöglichkeiten nach den Angaben im Literaturverzeichnis) drängt sich für einen fächerübergreifenden Unterricht auf: Geschichte, Sprachen (Englische Beiträge, Originaltexte).

Geschichte in der Mathematik? – Mathematik in der Geschichte?

Moderner Geschichtsunterricht erschöpft sich nicht darin, Geschichte(n) zu erzählen, sondern stellt das Fach als Wissenschaft und einzelne Aspekte als Forschungsgegenstände dar. Das kann bedeuten, dass Quellentexte herangezogen werden, solche miteinander verglichen und eventuell in ihrem Gehalt gewichtet und bewertet werden. Dazu gehört aber auch das ganze Umfeld dieser Quellen: Kenntnis der Zeit und der Umstände; wie Personen, Wirtschafts- und Gesellschaftsformen, politische Verhältnisse, technische Gegebenheiten und Errungenschaften, u.a..

Durch das Studium des Umfeldes einer Person wie «Jakob Steiner» soll versucht werden, ein Stück Entwicklungsgeschichte der Mathematik darzustellen. Jakob Steiner stellt den Typ des «reinen oder Nur- Mathematikers» dar, wie sie früher kaum existierten. Damit muss das Interesse an der Mathematik aus der Mathematik selbst begründet werden: Ist es die Schönheit einer Methode, die Freude am Denken, das Losgelöstsein von realen Unzulänglichkeiten, die Freude am Lehren und Lernen?

Mit «Jakob Steiner» sollen Anregungen gegeben werden zu Auseinandersetzungen mit der Biographie eines Menschen und seinem Umfeld. Durch diese eine Person werden Bezüge zu einem Zeitalter, zur Kultur- und Sozialgeschichte hergestellt, aber auch zu «menschlichen» Problemen (Umgang mit Erfolg, Altern, Freund- und Bekanntschaften, u.a.)

Literatur: Karlhorst Meyer, Gymnasialer Mathematikunterricht im Wandel. Franzbecker, 1996.

6. Literaturverzeichnis

[1] H.S.M. Coxeter: Unvergängliche Geometrie. Basel, 1963
[2] Peter Baptist: Die Entwicklung der neueren Dreiecksgeometrie, BI-Wissenschaftsverlag, 1992
[3] Zeitschrift «The Mathematics Teacher» des «NCTM» folgende Ausgaben: 2/1992, 7/1992, 3/1993, 5/1993, 8/1993, 9/1993, 2/1994, 6/1994, 9/1994, 8/1995, 1/1996 und 5/1996
[4] Jakob Steiner: Gesammelte Werke, 2 Bände, (Hrsg. K. Weierstrass), Berlin 1880/1882.
[5] Th. Clausen: Geometrische Sätze. Crelle's Journal , Band 3, p. 197–198 (1828)
[6] Erich Ch. Wittmann: Elementargeometrie und Wirklichkeit Vieweg, Braunschweig, 1987

Ulrich Schweizer, Mathematik-Studium an der Uni Bern, Gymnasiallehrer in den Fächern Mathematik und Physik am Gymnasium Alpenstrasse, Biel. Mitarbeit in der Lehrerinnen- und Lehrerfortbildung Unter-, Mittel- und Oberstufe, Wahlfach Mathematik.

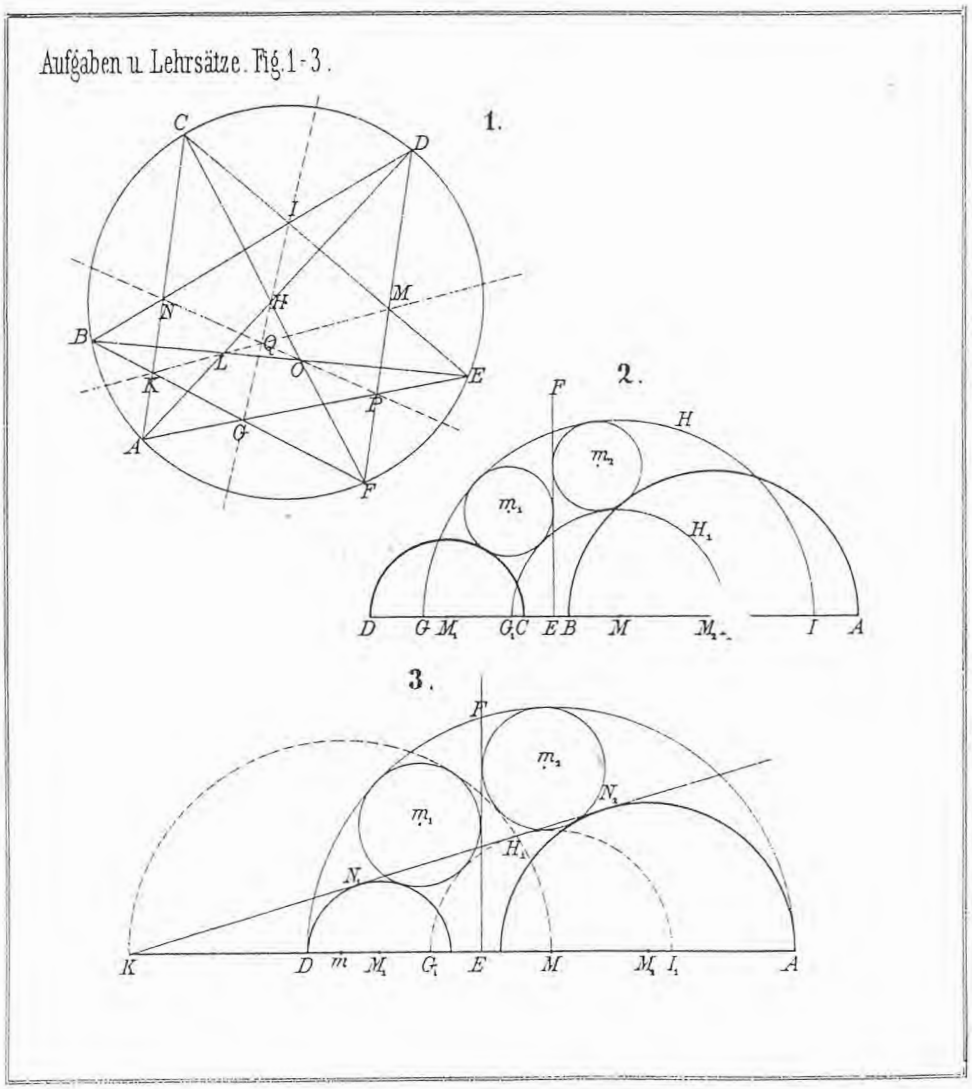
Dank

Am Schluss dieses Heftes gebührt es sich, meinen Dank an all die Personen auszusprechen, die zum Gelingen beigetragen haben: den drei «Studenten» K. Brönnimann, A. Eggenberg, M. Ledermann, sowie ihrem Dozenten F. Eggenberg, die sich für dieses Experiment begeistern liessen, Ch. Wüthrich für die spontane Zusage, einen Artikel beizusteuern.
Ohne Frau Barbara Kummer, Utzenstorf, die auf das Jubiläum aufmerksam machte, und ohne die vielen Materialien und Hinweise, die ich von ihr und Herrn Dr. Ch. Meier (Mathemat. Institut Bern) erhalten habe, wäre die Arbeit nie so spannend geworden.
Dem Personal der Burgerbibliothek Bern danke ich für den Zugang zu den Handschriften und die Bereitstellung der Fotos.

U. Schweizer

Literaturhinweis

Gerade rechtzeitig für diese Nummer mit einem mathematischen Schwergewicht ist im Paul Haupt Verlag, Bern das Buch *Schreibanlässe im Mathematikunterricht, Eine Unterrichtsform für den anwendungsorientierten Mathematikunterricht auf der Sekundarstufe* erschienen.
«Ziel des Buches ist es, das beschriebene Problemfeld theoretisch zu analysieren, die Unterrichtsform Schreibanlässe im Mathematikunterricht für das Sachrechnen vorzuschlagen und empirisch zu prüfen. Schreibanlässe sollen im anwendungsorientierten Mathematikunterricht einsichtsvolle, auf sachliche Argumente bauende Mathematisierungsprozesse stützen und mechanisch-assoziative Muster der Problembewältigung in den Hintergrund treten lassen.»

Der Autor:
Armin Hollenstein, Dr. phil, geboren 1952, Ausbildung zum Primarlehrer. Nach dreijähriger Unterrichtstätigkeit Studium an der Universität Bern in Pädagogik, Mathematik und Psychologie.
1981 bis 1993 Dozent für Didaktik der Mathematik am Staatlichen Seminar Biel (Primarstufe), seit 1993 an der Universität Bern (Sekundarstufen I und II).

Literaturangaben: Hollenstein Armin, Schreibanlässe im Mathematikunterricht, Eine Unterrichtsform für den anwendungsorientierten Mathematikunterricht auf der Sekundarstufe, Theoretische Analyse, didaktischer Vorschlag und empirische Evaluation, Verlag Paul Haupt, Bern, Stuttgart, Wien, 1996.
ISBN 3-258-05276-2